Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. F. Hettlich
Dr. S. Schmitt
Dipl.-Math. J. Kusch

Karlsruhe, den 12.04.2011

# Lösungen zum 1. Übungsblatt
# zur Vorlesung Höhere Mathematik II
# für biw/ciw/mach/mage/vt

**Aufgabe 1:** Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$0 = (x+1)y'(x) + 2y(x) - 1, \quad y(0) = \frac{3}{2}.$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der linearen homogenen Differentialgleichung $0 = (x+1)y'(x)+2y(x)$.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung und lösen Sie das Anfangswertproblem.

**Lösung 1:**

(a) Eine Variablentrennung führt auf die Gleichung

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -\frac{2}{x+1},$$

und durch Integration erhalten wir

$$\int \frac{dy}{y} = \ln|y| = -2\int \frac{dx}{x+1} = -2\ln|x+1| + C.$$

Also erhalten nach Umbenennung der Konstanten die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$y_h(x) = \frac{D}{(x+1)^2}$$

mit einer Konstanten $D \in \mathbb{R}$.

(b) Wir bestimmen die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung mit Hilfe der Variation des Konstanten: Es sei

$$y(x) = \frac{D(x)}{(x+1)^2}$$

und damit

$$y'(x) = \frac{D'(x)}{(x+1)^2} - 2\frac{D(x)}{(x+1)^3}.$$

Eingesetzt in die inhomogene Differentialgleichung erhalten wir

$$\frac{D'(x)}{(x+1)^2} - 2\frac{D(x)}{(x+1)^2} + 2\frac{D(x)}{(x+1)^2} \stackrel{!}{=} 1,$$

also ist $D'(x) = x+1$, bzw. $D(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + C$. Wir erhalten als allgemeine Lösung

$$y(x) = \frac{\frac{1}{2}x^2 + x}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

mit noch unbekannter Konstante $C \in \mathbb{R}$. Setzen wir den Anfangswert ein, so muss $C = \frac{3}{2}$ sein und die Lösung des Anfangswertproblem lautet

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{\frac{1}{2}x^2 + x}{(x+1)^2} + \frac{\frac{3}{2}}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2}}{(x+1)^2} + \frac{\frac{3}{2}}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

**Aufgabe 2:** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung folgender Differentialgleichungen:

(a) $y'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, (b) $y'(x) = x^2 y(x)$, (c) $y'(x) = \frac{x}{y^2(x)\sqrt{1+x^2}}$, (d) $y'(x) = 1 + \frac{y^2(x)}{x^2+xy(x)}$.

Hinweis zu (d): Verwenden Sie die Substitution $z(x) = \frac{y(x)}{x}$. Es reicht, wenn Sie die Lösung in impliziter Form angeben.

**Lösung 2:** (a) $\int y'(x)dx = \int \frac{1}{1+x^2}dx$ also $y(x) = \arctan x + C$.

(b) Es liegt eine lineare homogene Differentialgleichung vor. Die Lösungsformel von Seite 124 im HM1-Skript liefert $y(x) = C \cdot e^{x^3/3}$ mit $C \in \mathbb{R}$.

(c) Hier führt die Trennung der Veränderlichen zur Gleichung $y^2(x)y'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Nach Integration beider Seiten der Gleichung bekommen wir

$$\int y^2(x)y'(x)dx = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx.$$

Bei der Berechnung von $\int y^2(x)y'(x)dx$ verwenden wir die Leibniz-Notation: Wir setzen $z = y(x)$ und $\frac{dz}{dx} = y'(x)$. Dann haben wir

$$\int y^2(x)y'(x)dx = \int z^2 \frac{dz}{dx}dx = \int z^2 dz = \frac{1}{3}z^3 + D = \frac{1}{3}y^3(x) + D.$$

Also ist $\frac{y^3(x)}{3} = \sqrt{1+x^2} + C$ mit $C \in \mathbb{R}$ die Lösung in impliziter Form. Die Lösung in expliziter Form ist $y(x) = \sqrt[3]{3\sqrt{1+x^2} + 3C}$ mit $C \in \mathbb{R}$.

Bemerkung: Man kann die Lösung auch so schreiben: Nach Trennung der Veränderlichen bekommen wir $y^2 dy = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$. Es folgt, dass $\int y^2 dy = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$ und also $\frac{y^3(x)}{3} = \sqrt{1+x^2} + C$ ist die Lösung in impliziter Form.

(d) Wir haben eine Differentialgleichung der Bauart $y'(x) = f(\frac{y(x)}{x})$, nämlich $y'(x) = 1 + \frac{\left(\frac{y(x)}{x}\right)^2}{1+\frac{y(x)}{x}}$. Wir substituieren $z(x) = y(x)/x$. Da $y'(x) = z'(x)x + z(x)$, erhalten wir $z'(x)x + z(x) = f(z(x))$. Also

$$z'(x) = \frac{f(z(x)) - z(x)}{x} = \frac{1 + \frac{z^2(x)}{1+z(x)} - z(x)}{x} = \frac{1}{(1+z(x))x}.$$

Nach Trennung der Veränderlichen bekommen wir $(1+z)dz = \frac{1}{x}dx$. Dann $\int(1+z)dz = \int \frac{1}{x}dx$, d.h. $z + \frac{z^2}{2} = \ln|x| + C$. Damit ist $(y/x) + \frac{(y/x)^2}{2} = \ln|x| + C$ eine implizite Darstellung der Lösung.

**Aufgabe 3:** Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y'(x) + \frac{1}{2}y(x) + xe^x y^3(x) = 0\,,\; y(0) = 1.$$

**Lösung 3:** $y' = -\frac{1}{2}y - xe^x y^3$ ist eine Bernoulli Differentialgleichung $y' = p(x)y + q(x)y^\alpha$ mit $p(x) = -\frac{1}{2}$, $q(x) = -xe^x$ und $\alpha = 3$. So substituieren wir mit $y(x) = v(x)^\lambda$ mit $\lambda = \frac{1}{1-\alpha} = -\frac{1}{2}$ also $y = v^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{v}}$. Dann ist $y' = -\frac{1}{2}v^{-\frac{3}{2}} \cdot v'$ und somit lautet die Differentialgleichung für $v$:

$$-\frac{1}{2}v^{-\frac{3}{2}}v' = -\frac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}} - xe^x v^{-\frac{3}{2}} \quad \text{also} \quad v' = v + 2xe^x$$

Dies ist eine lineare inhomogene Differentialgleichung. Die Lösung der homogenen Differentialgleichung $v' = v$ lässt sich durch Variablentrennung bestimmen: $v_H(x) = Ce^x$. Mittels Variation der Konstanten bestimmen wir nun die Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung: $v = C(x)e^x \Rightarrow v' = C'e^x + Ce^x$ und damit gilt $C'e^x + Ce^x = Ce^x - xe^x$ und so $C' = 2x$ oder $C(x) = x^2 + D$. Somit lautet die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $v = (x^2 + D)e^x$ und resubstituiert erhalten wir $y = \frac{1}{\sqrt{(x^2+D)e^x}}$ als Lösung der ursprünglichen Problemstellung. Für $x = 0$ ist $y(0) = \frac{1}{\sqrt{D}} \overset{!}{=} 1$ also ist $D = 1$ und das Endergebnis lautet: $y = \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)e^x}}$.

**Aufgabe 4:** Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Anfangswertaufgaben:

(a) $y'(x) = \dfrac{1}{1-x}y(x) + x - 1, \quad x > 1, \quad y(2) = 0,$

(b) $y^3(x) - x^2 + xy^2(x)y'(x) = 0, \quad x > 0, \quad y(1) = 1,$

(c) $y'(x) = \sqrt{1 - y^2(x)}, \quad y(0) = \dfrac{1}{2}.$

**Lösung 4:** (a) Das ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung. Die Lösung der homogenen Differentialgleichung $y'(x) = \frac{1}{1-x}y(x)$ ist $y_h(x) = Ce^{-\ln(x-1)} = C\frac{1}{x-1}$, da $x > 1$. Eine partikuläre Lösung für die inhomogene Differentialgleichung bekommen wir mit Variation der Konstanten: $y'(x) = C'(x)\frac{1}{x-1} - C(x)\frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{1-x}\frac{C(x)}{x-1} + x - 1$, also $C'(x) = (x-1)^2$, $C(x) = (x-1)^3/3$ und damit $y_p(x) = (x-1)^2/3$. Also

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = \frac{C}{x-1} + \frac{(x-1)^2}{3}.$$

Die Anfangsbedingung impliziert $0 = C + 1/3$, daher $C = -1/3$ und somit ist $y(x) = \frac{1}{3}((x-1)^2 - \frac{1}{x-1})$ die Lösung des Anfangswertproblems.

(b)Umstellen und Division durch $xy^2(x)$ ergibt: $y'(x) = \frac{x}{y^2(x)} - \frac{y(x)}{x} = (-1/x)y(x) + xy^{-2}(x)$. Dies ist eine Bernoullische Differentialgleichung mit $p(x) = -\frac{1}{x}$, $q(x) = x$ und $\alpha = -2$. Wir setzen also $v(x) := y^{1-(-2)}(x) = y^3(x)$ und erhalten die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$v'(x) = 3(-1/x)v(x) + 3x.$$

Die allgemeine Lösung $v_h(x)$ der homogenen Differentialgleichung $v'(x) = 3(-1/x)v(x)$ ist $v_h(x) = Ce^{-3\ln|x|} = Ce^{\ln(x^{-3})} = Cx^{-3}$, da $x > 0$. Eine partikuläre Lösung erhält man durch Variation der Konstanten: $v_p(x) = C(x)/x^3$. Eingesetzt: $v_p'(x) = \frac{C'(x)}{x^3} - 3\frac{C(x)}{x^4} = 3(-1/x)\frac{C(x)}{x^3} + 3x$ also $C'(x) = 3x^4$ oder $C(x) = \frac{3}{5}x^5$. Also die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Gleichung ist

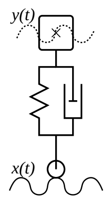
$$v(x) = v_p(x) + v_h(x) = \frac{3}{5}\frac{x^5}{x^3} + Cx^{-3} = \frac{3}{5}x^2 + Cx^{-3}$$

und somit ist $y(x) = (\frac{3}{5}x^2 + Cx^{-3})^{\frac{1}{3}}$ die allgemeine Lösung der Bernoullischen Differentialgleichung. Anpassen der Anfangsbedingung liefert $C = 2/5$.

(c)Das ist eine autonome Differentialgleichung: $\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = dx$, also $\arcsin y = x + c$, d.h. $y(x) = \sin(x+c)$, $-\pi/2 - c \le x \le \pi/2 - c$. Die Anfangsbedingung $\frac{1}{2} = \sin(0+c)$ liefert $c = \pi/6$.

**Aufgabe 5:** Auf dem Weg zur Uni fährt Herr H. täglich mit seinem Fahrrad über verschiedene Kopfsteinpflaster und möchte aus der gefühlten vertikalen Körperbewegung $y(t)$ die Amplitude der Pflaster $x(t)$ bestimmen.

Vereinfacht modellieren wir sein Gewicht mit 100 $kg$, das Fahrrad als Einrad und den Reifen durch Feder mit Konstante 1500 $\frac{N}{m}$ und Dämpfung 500 $\frac{kg}{s}$. Die Kräftebilanz führt uns gekürzt auf die Gleichung




$$-my''(t) - b(y'(t) - x'(t)) - c(y(t) - x(t)) = 0$$

mit einheitenlosen Konstanten $m = 1$, $b = 5$ und $c = 15$.

(a) Stellen Sie die homogene Differentialgleichung für $x(t)$ auf und lösen Sie diese. Was ist das Verhalten von $x(t)$ für $t \to \infty$?

(b) Stellen Sie die inhomogenen Differentialgleichungen für $x(t)$ für die gefühlten Körperbewegungen $y_1(t) = \sin(t)$ und $y_2(t) = \sin(2t)$ bei den unterschiedlichen Böden auf.

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Ansätze

$$x_1(t) = A_1 \sin(t) + B_1 \cos(t) \qquad \text{bzw.} \qquad x_2(t) = A_2 \sin(2t) + B_2 \cos(2t)$$

partikuläre Lösungen der inhomogenen Differentialgleichungen. Stimmt die Vermutung des Herrn H., dass das zweite Pflaster für $t \to \infty$ deutlich höhere Auslenkungen besitzt?

**Lösung 5:** Zunächst einige Worte zur Form der Kräftebilanz

$$-my''(t) - b(y'(t) - x'(t)) - c(y(t) - x(t)) = 0\,.$$

Der erste Term beschreibt die Gegenkraft durch die Massenträgheit (Masse mal Beschleunigung), der zweite Term beschreibt die Gegenkraft durch das Dämpfungsglied, diese ist linear zum Geschwindigkeitsunterschied von Boden zur Masse. Der dritte Term modelliert die ideale Feder, dessen Gegenkraft linear zur Auslenkung zwischen Boden und Masse ist.

(a) Wir setzen die Werte ein und stellen die Differentialgleichung um:

$$5x'(t) + 15x(t) = y''(t) + 5y'(t) + 15y(t)$$

Damit lautet die homogene Differentialgleichung:

$$x'(t) + 3x(t) = 0$$

Durch Variablentrennung oder der Lösungsformel aus dem Skript erhalten wir die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$x(t) = C\,e^{-3t}$$

mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$. Unabhängig von der Konstanten erhalten wir ein Abfallverhalten für $x \to \infty$:

$$\lim_{t\to\infty} e^{-3t} = 0$$

Wir sehen also, dass wenn sich der Hintern länger nicht bewegt, dann kann es auch keine Huckel auf der Straße geben.

(b) Um die inhomogenen Differentialgleichungen zu bestimmen, benötigen wir die Ableitungen der $y_1(t)$ und $y_2(t)$:

$$\begin{array}{rclrclrcl} y_1(t) &=& \sin(t)\,, & y_1'(t) &=& \cos(t)\,, & y_1''(t) &=& -\sin(t)\,, \\ y_2(t) &=& \sin(2t)\,, & y_2'(t) &=& 2\cos(2t)\,, & y_2''(t) &=& -4\sin(2t) \end{array}$$

Setzen wir dies in die umgestellte Differentialgleichung erhalten wir für $y_1$ die Gleichung

$$5x_1'(t) + 15x_1(t) = -\sin(t) + 5\cos(t) + 15\sin(t) = 14\sin(t) + 5\cos(t)$$

und für $y_2$

$$5x_1'(t) + 15x_1(t) = -4\sin(2t) + 10\cos(2t) + 15\sin(2t) = 11\sin(2t) + 10\cos(2t)\,.$$

(c) Um die Ansätze zu verwenden, brauchen wir auch die Ableitungen:

$$\begin{array}{rcl} x_1'(t) &=& A_1\cos(t) - B_1\sin(t) \\ x_2'(t) &=& 2A_2\cos(2t) - 2B_2\sin(2t) \end{array}$$

Durch Einsetzen des ersten Ansatzes in die erste inhomogene Differentialgleichung erhalten wir

$$\begin{array}{rcl} 5A_1\cos(t) - 5B_1\sin(t) + 15A_1\sin(t) + 15B_1\cos(t) &=& (15A_1 - 5B_1)\sin(t) + (5A_1 + 15B_1)\cos(t) \\ &\stackrel{!}{=}& 14\sin(t) + 5\cos(t)\,. \end{array}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert $15A_1 - 5B_1 = 14$ und $5A_1 + 15B_1 = 5$ und nach Lösung des Gleichungssystems erhalten wir $A_1 = \frac{47}{50}$ und $B_1 = \frac{1}{50}$. Die allgemeine Lösung als Summe von partikulärer und homogener Lösung lautet

$$x_1(t) = \frac{47}{50}\sin(t) + \frac{1}{50}\cos(t) + Ce^{-3t}\,.$$

Für $t \to \infty$ verschwindet der unbestimmte Anteil $Ce^{-3t}$ und es ist nur noch die Amplitude von $\frac{47}{50}\sin(t) + \frac{1}{50}\cos(t)$ zu bestimmen, diese ist gerade $\sqrt{(\frac{47}{50})^2 + (\frac{1}{50})^2} = \frac{1}{50}\sqrt{2210} \approx 0.94$, mit einer Phasenverschiebung von $\arctan(\frac{1}{47}) \approx 1.2°$. Mit dem zweiten Ansatz erhalten wir mit der zweiten inhomogenen Differentialgleichung

$$\begin{array}{rcl} 10A_2\cos(2t) - 10B_2\sin(2t) + 15A_2\sin(2t) + 15B_2\cos(2t) &=& (15A_2 - 10B_2)\sin(2t) + (10A_2 + 15B_2)\cos(2t) \\ &\stackrel{!}{=}& 11\sin(2t) + 10\cos(2t)\,. \end{array}$$

Wir erhalten $15A_2 - 10B_2 = 11$ und $10A_2 + 15B_2 = 10$ mit den Lösungen $A_2 = \frac{53}{65}$ und $B_2 = \frac{8}{65}$. Die allgemeine Lösung lautet hier

$$x_2(t) = \frac{53}{65}\sin(2t) + \frac{8}{65}\cos(2t) + Ce^{-3t}\,.$$

Für $t \to \infty$ erhalten wir eine Phasenverschiebung von ca. $8.6°$ und eine Amplitude von $\frac{1}{65}\sqrt{2873} \approx 0.82$, also ist die Vermutung falsch– zwar hat das Pflaster im zweiten Fall eine höhere Frequenz, d.h. das Fahrrad hüpft viel schneller hoch und runter und Herr H. wird deutlich mehr durchgeschüttelt, doch tatsächlich sind die Bodenwellen flacher und das Radmodell schwingt mehr mit.

Das Modell dieser Aufgabe stammt aus dem Buch *Mathematische Methoden der Technischen Mechanik* von M. Riemer, J. Wauer, W. Wedig.