# 10. Übungsblatt
# Aufgaben mit Lösungen

**Aufgabe 46:** Die Gammafunktion ist definiert durch

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt, \qquad z > 0.$$

Zeigen Sie, dass $\Gamma(z)$ für $z > 0$ existiert und dass $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ gilt. Folgern Sie, dass $\Gamma(n+1) = n!$ für $n = 1, 2, \ldots$.

**Lösung 46:** Um zu zeigen, dass $\Gamma(z)$ existiert, müssen wir die Singularität des Integranden bei Null und das unbeschränkte Integrationsgebiet betrachten. Dazu spalten wir auf

$$\int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt = \int_0^1 t^{z-1} e^{-t}\, dt + \int_1^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt =: I_1(z) + I_2(z).$$

Der Integrand $t^{z-1}e^{-t}$ ist positiv, deshalb können wir im folgenden alle Beträge weglassen. Für $I_1(z)$ schätzen wir ab, dass

$$t^{z-1} e^{-t} \le t^{z-1}, \qquad t \in (0, 1),$$

also ist

$$I_1(z) \le \int_0^1 t^{z-1}\, dt = \frac{1}{z}, \qquad z > 0.$$

$I_1$ existiert also für $z > 0$. Jetzt zu $I_2$: Da die Exponentialfunktion $\exp(-t/2)$ für $t \to \infty$ schneller abfällt als jede Potenz von $t$ wächst, gibt es für alle $z > 0$ eine Konstante $C(z)$, so dass

$$t^{z-1} e^{-\frac{t}{2}} \le C(z), \qquad t \ge 1.$$

Also ist

$$t^{z-1} e^{-t} \le C(z) e^{-\frac{t}{2}}, \qquad t \ge 1.$$

Deshalb können wir $I_2$ abschätzen durch

$$I_2(z) \le C(z) \int_1^\infty e^{-\frac{t}{2}}\, dt = C(z) \frac{1}{2} e^{-1/2}$$

Also existiert auch $I_2(z)$ für alle $z > 0$, also auch $\Gamma(z)$.

Um die angegebene Formel $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ nachzuweisen, integrieren wir partiell ($v'(t) = t^{z-1}$, $v(t) = t^z/z$, $u(t) = \exp(-t)$, $u'(t) = -\exp(-t)$),

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt = \left[ -\frac{1}{z} t^z e^{-t} \right]_{t=0}^{t=\infty} + \int_0^\infty \frac{1}{z} t^z e^{-t}\, dt = \frac{1}{z} \Gamma(z+1).$$

Wegen $\Gamma(1) = \int_0^\infty \exp(-t)\, dt = 1$ und $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ folgt $\Gamma(n+1) = n!$ mit einer einfachen Induktion.

**Aufgabe 47:** Zeigen Sie die Stetigkeit und Differenzierbarkeit des folgenden Parameterintegrals für $t \in \mathbb{R}$:

$$J(t) = \int_0^1 \arctan(tx)\, dx\,.$$

Berechnen Sie die Ableitung $J'(t)$. Besitzt die Ableitung einen Grenzwert für $t \to 0$?

**Lösung 47:** Der Integrand ist $f(t, x) = \arctan(tx)$. Sei $t \in \mathbb{R}$ beliebig aber fest, dann ist die Funktion in $x$ auf $[0, 1]$ integrierbar. Ist nun $x \in [0, 1]$ fest, so ist die Funktion $f$ in $t \in \mathbb{R}$ stetig, und der Betrag durch $g_1(x) = \frac{\pi}{2}$ unabhängig von $x$ beschränkt. Damit ist die Funktion $J$ stetig.

Die Ableitung des Integranden nach $t$ ergibt:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = \frac{x}{1 + x^2 t^2}$$

Wir können leicht die Majorante $|\frac{\partial f}{\partial t}| \le 1 = g_2(t)$ unabhängig von $x$ finden, da $x \in [0, 1]$. Damit ist $J$ differenzierbar und wir erhalten

$$J'(t) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}\, dx = \int_0^1 \frac{x}{1 + x^2 t^2}\, dx = \frac{1}{2t^2} \int_0^{t^2} \frac{1}{1+z}\, dz = \frac{1}{2t^2} \left[\ln|z+1|\right]_0^{t^2} = \frac{1}{2t^2} \ln(1 + t^2)\,.$$

Den Grenzwert $J'(t)$ für $t \to 0$ kann man mit der Regel von l'Hospital berechnen:

$$\lim_{t\to 0} J'(t) = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t^2)}{2t^2} \overset{0/0}{=} \lim_{t\to 0} \frac{2t}{4t(1+t^2)} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{2(1+t^2)} = \frac{1}{2}.$$

**Aufgabe 48:** Berechnen Sie die Laplacetransformierten zu:

(a) $f(x) = x^2 + 3x + 4 + x^2\sin(2x)$, (b) $f(x) = \begin{cases} \sin(x), & 0 \le x < \pi, \\ \cos(x), & x \ge \pi, \end{cases}$

(c) $f(x) = (e^{2x} + e^{3x}) \cdot \sin(4x)$, (d) $f(x) = \cos(x) - x\sin(x) = (x \cdot \cos(x))'$,

(e) $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Verwenden Sie in (e) die Definition der Laplace-Transformation und vollständige Induktion.

**Lösung 48:**

(a) Mit der Linearität der Laplacetransformation und Differentation im Bildraum folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}f(s) &= \mathcal{L}(x^2) + 3\mathcal{L}(x) + 4\mathcal{L}(1) + \mathcal{L}(x^2\sin(2x)) \\ &= \frac{2}{s^3} + \frac{3}{s^2} + \frac{4}{s} + \frac{d^2}{ds^2}\underbrace{\mathcal{L}(\sin(2x))}_{=\frac{2}{s^2+4}} \\ &= \frac{2}{s^3} + \frac{3}{s^2} + \frac{4}{s} - \frac{d}{ds}\left(\frac{4s}{(s^2+4)^2}\right) = \frac{2}{s^3} + \frac{3}{s^2} + \frac{4}{s} + \frac{12s^2-16}{(s^2+4)^3}, \quad s > 0. \end{aligned}$$

(b)

$$f(x) = \sin(x) + \begin{cases} 0 & 0 \le x < \pi \\ \cos(x) - \sin(x) & x \ge \pi \end{cases} = \sin(x) + \begin{cases} 0 & 0 \le x < \pi \\ -\cos(x-\pi) + \sin(x-\pi) & x \ge \pi \end{cases}$$

Der erste Summand kann direkt transformiert werden, beim zweiten kann man den Verschiebungssatz anwenden:

$$\mathcal{L}f(s) = \frac{1}{s^2+1} + e^{-\pi s}\left(-\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{1 + e^{-\pi s} - se^{-\pi s}}{s^2+1}, \quad s > 0.$$

(c)

$$f(x) = e^{2x}\sin(4x) + e^{3x}\sin(4x)$$

Hier kann bei beiden Summanden der Dämpfungssatz angewendet werden:

$$\mathcal{L}f(s) = \frac{4}{(s-2)^2+16} + \frac{4}{(s-3)^2+16}, \quad s > 3.$$

(d) Es gibt zwei Methoden dies zu lösen, einmal die Summanden einzeln:

$$\mathcal{L}f(s) = \frac{s}{s^2+1} + \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{s}{s^2+1} - \frac{2s}{(s^2+1)^2} = \frac{s^3-s}{(s^2+1)^2}, \quad s > 0.$$

Oder man nutzt die Ableitung: $f(x) = g'(x)$ mit $g(x) = x\cos(x)$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}f(s) &= \mathcal{L}(\cos t - t\sin t)(s) = \mathcal{L}((t\cos t)')(s) = s\mathcal{L}(t\cos t)(s) - g(0) = -s\frac{d}{ds}\mathcal{L}(\cos t)(s) - g(0) \\ &= -s \cdot \frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) - g(0) = s \cdot \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2} - 0 = \frac{s^3-s}{(s^2+1)^2}, \quad s > 0. \end{aligned}$$

(e) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $(\mathcal{L}t^n)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$ ist. Wir führen den Beweis der Aussage mit vollständiger Induktion durch:

$n = 1:$ Zu zeigen ist $(\mathcal{L}t)(s) = \frac{1}{s^2}$:

$$(\mathcal{L}t)(s) = \int_0^\infty te^{-st}\,dt = \left[-\frac{1}{s}te^{-st}\right]_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\,dt = 0 + \frac{1}{s^2}$$

$n \to n+1:$ Sei $(\mathcal{L}t^n)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Zu zeigen: $(\mathcal{L}t^{n+1})(s) = \frac{(n+1)!}{s^{n+2}}$.

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}t^{n+1})(s) = \int_0^\infty t^{n+1}e^{-st}\,dt &= \left[-\frac{1}{s}t^{n+1}e^{-st}\right]_0^\infty + \frac{(n+1)}{s}\int_0^\infty t^n e^{-st}\,dt \\ &= 0 + \frac{n+1}{s}(\mathcal{L}t^n)(s) = \frac{n+1}{s}\frac{n!}{s^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{s^{n+2}} \end{aligned}$$

**Aufgabe 49:** Welche Originalfunktion $f(t)$, $t \in [0, \infty)$, liegt bei der Laplace-Transformation der Bildfunktion

$$\text{(a)}\quad F(s) = \frac{2s}{s^4 + 2s^3 + 2s^2 + 2s + 1}\,, \qquad \text{(b)}\quad F(s) = \operatorname{arccot}(s-1)\,, \qquad \text{(c)}\quad F(s) = \frac{e^{-\pi s}}{\sqrt{s^2+1}}$$

zugrunde?
Hinweis: Bei (a) führe man eine Partialbruchzerlegung durch, bei (b) und (c) beziehe man sich auf geeignete Sätze zur Laplace-Transformation.
**Lösung 49:**

(a) $F(s) = \frac{2s}{s^4+2s^3+2s^2+2s+1} = \frac{2s}{(s^2+1)(s+1)^2} = \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{(s+1)^2}$ also ist $\mathcal{L}^{-1}(F(s))(t) = \sin t - te^{-t}$.

(b) Es sei $G(s) := -\frac{d}{ds}\operatorname{arccot} s = \frac{1}{s^2+1}$, damit ist $\mathcal{L}^{-1}(G(s))(t) = \sin t$. Mit dieser Aussage für die Ableitung erhalten wir $\mathcal{L}^{-1}(\operatorname{arccot} s)(t) = \frac{\sin t}{t}$, und damit letztlich $\mathcal{L}^{-1}(\operatorname{arccot}(s-1))(t) = \frac{\sin t e^t}{t}$.

(c) Es sei $G(s) := \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$, dann ist $\mathcal{L}^{-1}(G(s))(t) = J_0(t)$. Für den gegebenen Ausdruck erhalten wir damit

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-\pi s}}{\sqrt{s^2+1}}\right)(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } \ 0 \le t < \pi \\ J_0(t-\pi) & \text{für } \ \pi \le t < \infty \end{cases}.$$

**Aufgabe 50:** Gegeben Sei das Anfangswertproblem $y'(x) = 2y(x) - 1$, $y(0) = 1$.

(a) Berechnen Sie die exakte Lösung $y(x)$ des Anfangswertproblems.

(b) Berechnen Sie das Euler-Verfahren mit Schrittweite $h > 0$ für das Anfangswertproblem. Zeigen Sie, dass für die Approximation $y_k$ des Euler-Verfahrens an der Stelle $x_k = kh$ gilt: $y_k = \frac{(1+2h)^k}{2} + \frac{1}{2}$.

(c) Sie $x_k > 0$ beliebig aber fest. Zeigen Sie, dass die Abweichung $|y(x_k) - y_k|$ für $h \to 0$ gegen 0 konvergiert.

**Lösung 50:**

(a) Die zugehörige homogene Gleichung lautet $y'(x) - 2y(x) = 0$ und hat die allgemeine Lösung $y_h(x) = ce^{2x}$, $c \in \mathbb{R}$. Eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung ist $y_p(x) = \frac{1}{2}$ (z.B. durch Ansatz vom Typ d. rechten Seite). Die allgemeine Lösung der inhomogenem Gleichung lautet $y(x) = \frac{1}{2} + ce^{2x}$, $c \in \mathbb{R}$, und der Anfangswert liefert $c = \frac{1}{2}$. Somit lautet die exakte Lösung

$$y(x) = \frac{1}{2}(1 + e^{2x}).$$

(b) Das Euler-Verfahren mit Schrittweite $h > 0$ für eine Differentialgleichung $y'(x) = f(x, y(x))$ mit Anfangsbedingung $y(x_0) = y^{(0)}$ approximiert die exakte Lösung der DGL an den Punkten $x_k = kh$ durch Werte $y_k$, die rekursiv definiert sind durch

$$y_0 = y^{(0)}, \qquad y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k)h.$$

In unserem Beispiel ist die DGL $y'(x) = 2y(x) - 1$, also ist $f(x, y(x)) = 2y(x) - 1$, oder $f(x, y) = 2y - 1$. Wenn wir das ins Euler-Verfahren einsetzen, erhalten wir

$$y_0 = 1, \qquad y_{k+1} = y_k + (2y_k - 1)h,$$

oder

$$y_0 = 1, \qquad y_{k+1} = (1 + 2h)y_k - h.$$

Für $y_1$ ergibt sich

$$y_1 = \frac{1+2h}{2} + \frac{1}{2}.$$

Also stimmt die angegebene Formel für $y_k$ immerhin für $k = 1$. Nehmen wir an, dass die Formel für ein $k \in \mathbb{N}$ gilt, so erhalten wir

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= (1+2h)y_k - h \overset{I.V.}{=} (1+2h)\left(\frac{(1+2h)^k}{2} + \frac{1}{2}\right) - h \\ &= \frac{(1+2h)^{k+1}}{2} + (1+2h)/2 - h = \frac{(1+2h)^{k+1}}{2} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Also können wir folgern, dass die angebene Formel von $y_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

(c) nach a) und b) gilt $y(x_k) = \frac{1}{2}(1 + e^{2x_k})$ und $y_k = \frac{1}{2}((1+2h)^k + 1)$, somit ist die Abweichung

$$|y(x_k) - y_k| = \frac{1}{2}\left|e^{2x_k} - (1+2h)^k\right|.$$

Für jeden festen Punkt $x_k$ gilt $x_k = kh$ und somit $h = \frac{x_k}{k}$. Wenn die Schrittweite $h$ gegen null konvergiert, muss also $k \to \infty$ gelten. Durch einsetzen erhalten wir

$$|y(x_k) - y_k| = \frac{1}{2}|e^{2x_k} - \underbrace{(1 + \frac{2x_k}{k})^k}_{\to e^{2x_k}}| \to 0 \quad (k \to \infty).$$