11. Übungsblatt
Aufgaben mit Lösungen

Aufgabe 51: Gegeben seien die Funktionen

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad f(t) = \begin{cases} t-1, & 1 \leq t < 3, \\ 8-2t, & 3 \leq t < 4, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Stellen Sie die Funktion f mit Hilfe der Heavisidefunktion H ohne Fallunterscheidung dar.

(b) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f und berechnen Sie ihre Laplacetransformierte.

Lösung 51: Wir zerlegen die Funktion in einzelne Stücke und bestimmen so die Summanden:

$$\begin{array}{llllll} \text{Ab} & t=1 & \text{beginnt} & t-1 & \text{also} & (t-1)H(t-1)\,, \\ \text{ab} & t=3 & \text{endet} & t-1 & \text{also} & -(t-1)H(t-3)\,, \\ \text{ab} & t=3 & \text{beginnt} & 8-2t & \text{also} & (8-2t)H(t-3)\,, \\ \text{ab} & t=4 & \text{endet} & 8-2t & \text{also} & -(8-2t)H(t-4)\,. \end{array}$$

Wir erhalten insgesamt:

$$\begin{aligned} f(t) &= (t-1)H(t-1) - (t-1)H(t-3) + (8-2t)H(t-3) - (8-2t)H(t-4) \\ &= (t-1)H(t-1) - 3(t-3)H(t-3) + 2(t-4)H(t-4) \end{aligned}$$

Damit lautet die Laplacetransformierte $\mathcal{L}[f(t)] = \dfrac{1}{s^2}e^{-s} - \dfrac{3}{s^2}e^{-3s} + \dfrac{2}{s^2}e^{-4s}$.

Aufgabe 52: Es sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ die Funktion mit Periode 2, die auf dem Intervall $[0, 2)$ gegeben ist durch

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq t < 1, \\ 0 & \text{für } 1 \leq t < 2. \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion auf dem Intervall $[0, 10]$.

(b) Berechnen Sie die Laplacetransformierte von f.

Lösung 52:

(a)

(b) Es sei R_m die Rechteckfunktion, die nur auf dem Intervall $[2m, 2m+1]$ den Wert 1 hat und sonst 0 ist. Wir haben $\int\limits_0^\infty R_m e^{-st}dt = \int\limits_{2m}^{2m+1} e^{-st}dt = [-\frac{e^{-st}}{s}]_{2m}^{2m+1} = \frac{1}{s}(e^{-2ms} - e^{-2ms-s}) = \frac{1-e^{-s}}{s}e^{-2ms}$. Die Bildfunktion ist daher $\frac{1-e^{-s}}{s}\sum\limits_{m=0}^{\infty} e^{-2ms} = \frac{1}{s}\frac{1-e^{-s}}{1-e^{-2s}} = \frac{1}{s}\frac{1-e^{-s}}{(1-e^{-s})(1+e^{-s})} = \frac{1}{s(1+e^{-s})}$.

Aufgabe 53: Man löse die folgenden Anfangswertprobleme mit Hilfe der Laplace-Transformation:

(a) $y'''(t) - y''(t) + y'(t) - y(t) = e^{2t}, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = -1$

(b) $x''(t) + 2x'(t) + x(t) = 3te^{-t}, \qquad x(0) = 4,\ x'(0) = 2,\ t \geq 0$

Lösung 53:

(a) $Y(s) := \mathcal{L}(y(t))(s) \Rightarrow \mathcal{L}(y'(t)) = sY(s) - 1,\ \mathcal{L}(y''(t)) = s^2Y(s) - s,\ \mathcal{L}(y'''(t)) = s^3Y(s) - s^2 + 1$
Mit $\mathcal{L}(e^{2t}) = \frac{1}{s-2}$ erhält man die transformierte Gleichung

$$Y(s)(s^3 - s^2 + s - 1) - s^2 + 1 + s - 1 = \frac{1}{s-2}$$

Nun lösen wir nach $Y(s)$ auf:

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{s-2} + s^2 - s}{s^3 - s^2 + s - 1} = \frac{s^3 - 3s^2 + 2s + 1}{(s-2)(s-1)(s^2+1)} \overset{\text{PBZ}}{=} \frac{1}{5}\frac{1}{s-2} - \frac{1}{2}\frac{1}{s-1} + \frac{13}{10}\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{10}\frac{1}{s^2+1}$$

Rücktransformation ergibt

$$y(t) = \frac{1}{5}e^{2t} - \frac{1}{2}e^t + \frac{13}{10}\cos t + \frac{1}{10}\sin t.$$

(b) Wir bezeichnen die Laplacetransformierte von der Funktion x mit $X(s) := \mathcal{L}(x)(s)$. Dann ist

$$\mathcal{L}(x'')(s) = s^2\mathcal{L}(x)(s) - sx(0) - u'(0), \qquad \mathcal{L}(x')(s) = s\mathcal{L}(x)(s) - x(0),$$

also

$$\mathcal{L}(x'')(s) = s^2X(s) - 4s - 2, \qquad \mathcal{L}(x')(s) = sX(s) - 4.$$

Also muß $X(s)$ die algebraische Gleichung

$$s^2X(s) - 4s - 2 + 2(sX(s) - 4) + X(s) = \frac{3}{(s+1)^2}$$

erfüllen, oder

$$X = \frac{4s+10}{(s+1)^2} + \frac{3}{(s+1)^4} = \frac{4}{s+1} + \frac{6}{(s+1)^2} + \frac{3}{(s+1)^4}.$$

Jetzt können wir mit einer Rücktransformation die Lösung $x(t)$ des AWP's angeben,

$$x(t) = 4e^{-t} + 6te^{-t} + 3 \cdot \frac{t^3}{3!}e^{-t} = 4e^{-t} + 6te^{-t} + \frac{1}{2}t^3e^{-t}$$

Aufgabe 54: Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem mit Hilfe der Laplace-Transformation:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} & & x(t) & - & 2y(t) & + & z(t) & = & -2t, \\ -x'(t) & + & 3y'(t) & - & 2x(t) & + & y(t) & = & 3+t, \\ & & 3z''(t) & - & 5x'(t) & - & 2z(t) & = & 0, \end{array}$$

$$x(0) = 1, \quad y(0) = -1, \quad z(0) = -3, \quad z'(0) = 2.$$

Lösung 54: Wir setzen $(\mathcal{L}x)(s) = X(s)$, also gilt $\mathcal{L}(x')(s) = sX(s) - x(0) = sX(s) - 1$ und $(\mathcal{L}y)(s) = Y(s)$, also $\mathcal{L}(y')(s) = sY(s)+1$ und $(\mathcal{L}z)(s) = Z(s)$, also $\mathcal{L}(z')(s) = sZ(s)+3$ und $\mathcal{L}(z'')(s) = s^2Z(s)+3s-2$. Wenn wir dann das angegebene System transferieren, erhalten wir folgendes System für die Laplacetransformierten $X = X(s), Y = Y(s)$ und $Z = Z(s)$:

$$\begin{array}{rcl} X - 2Y + Z & = & -\frac{2}{s^2} \\ -(sX-1) + 3(sY+1) - 2X + Y & = & \frac{3}{s} + \frac{1}{s^2} \\ 3(s^2Z + 3s - 2) - 5(sX-1) - 2Z & = & 0 \end{array}$$

Wir formen das System um und finden

$$\begin{array}{rcl} X - 2Y + Z & = & -\frac{2}{s^2} \\ -(s+2)X + (3s+1)Y & = & -4 + \frac{3}{s} + \frac{1}{s^2} \\ -5sX + (3s^2-2)Z & = & 1 - 9s \end{array}$$

Auflösen des Systems ergibt

$$X = \frac{1}{s+2} + \frac{2}{s^2+1} \qquad Y = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+1} \qquad Z = -\frac{1}{s+2} - \frac{2s}{s^2+1}.$$

Die Funktionen X, Y und Z können wir rücktransformieren, um die Lösungen x, y und z des Anfangswertproblems zu erhalten:

$$x(t) = e^{-2t} + 2\sin t, \qquad y(t) = t + \sin t - \cos t, \qquad z(t) = -e^{-2t} - 2\cos t.$$

Aufgabe 55: Bestimmen Sie die Lösung $f(x)$ der Volterraschen Integralgleichung

$$f(x) - 2\int_0^x \cos(x-y)f(y)dy = e^x$$

mit Hilfe der Laplace-Transformation. Hinweis: Der Faltungssatz könnte nützlich sein.

Lösung 55: Die Integralgleichung lautet mit der Faltungsschreibweise

$$f(x) - 2(\cos * f)(x) = e^x.$$

Wir wenden die Laplace-Transformation auf beide Seiten an und finden

$$F(s) - 2\mathcal{L}(\cos)(s) \cdot F(s) = \frac{1}{s-1},$$

also

$$F(s) - \frac{2s}{s^2+1}\, F(s) = \frac{1}{s-1}.$$

Wir lösen nach F auf:

$$F(s) = \frac{s^2+1}{(s-1)^3}.$$

Den letzten Ausdruck zerlegen wir mit Partialbruchzerlegung,

$$\frac{s^2+1}{(s-1)^3} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{(s-1)^3}, \qquad s^2+1 = A(s-1)^2 + B(s-1) + C.$$

Der Koeffizientenvergleich liefert

$$F(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{2}{(s-1)^2} + \frac{2}{(s-1)^3},$$

und die Rücktransformation ergibt

$$f(x) = e^x + 2xe^x + x^2e^x = e^x(1+2x+x^2).$$