# 13. Tutorium
# Aufgaben mit Lösungen

**Aufgabe T37:** Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'(x) + y(x) - y^3(x) = 0, \quad y(0) = \frac{1}{2}.$$

**Lösung T37:** Es handelt sich um eine Bernoulli Differentialgleichung. Wir setzen $v(x) = y^{-2}$, d.h. $v'(x) = -2y'(x)y^{-3}(x)$. Dann erhalten wir für $v$ die lineare Differentialgleichung $v'(x) - 2v(x) = -2$.
Zunächst lösen wir die homogene DGL durch Separation, d.h.

$$\ln|v| = \int \frac{1}{v}\,dv = \int \frac{v'(x)}{v(x)}\,dx = \int 2\,dx = 2x + C.$$

Also folgt $v_h(x) = c\,e^{2x}$. Durch Variation der Konstanten $c$ lässt sich nun die allgemeine Lösung ermitteln. Aus $c'(x) = -2e^{-2x}$ bzw. $c(x) = e^{-2x} + \tilde{c}$ ergibt sich eine partikuläre Lösung $v_p(x) = e^{-2x}e^{2x} = 1$ und somit die allgemeine Lösung

$$v(x) = v_p(x) + v_h(x) = 1 + c\,e^{2x} \quad \text{bzw.} \quad y(x) = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + c\,e^{2x}}}.$$

Die Anfangsbedingung $y(0) = 1/2$ impliziert $c = 3$. Somit ist $y(x) = \frac{1}{\sqrt{1+3\,e^{2x}}}$ die gesuchte Lösung.

**Aufgabe T38:** Gegeben seien die Ebenen $F$ und $E_\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, durch

$$F: x_1 - x_3 = 2 \qquad \text{und} \qquad E_\lambda : 2x_1 - 5x_2 + \lambda x_3 = 5.$$

(a) Für welche Werte von $\lambda$ schneiden sich die beiden Ebenen?
Berechnen Sie gegebenenfalls die Schnittgerade $g_\lambda$.

(b) Berechnen Sie die Projektion orthogonal zu $F$ der Ebene $E_\lambda$ in die Ebene $F$.
Diskutieren Sie die möglichen Fälle.

**Lösung T38:**

(a) Die Normalenvektoren von $F$ und $E_\lambda$ sind stets linear unabhängig, also schneiden sich die beiden Ebenen für alle Werte von $\lambda$. Um $g_\lambda$ zu bestimmen, mache den Ansatz $x_1 = 5\mu$. Es folgt $x_3 = -2 + 5\mu$ und $x_2 = -1 - 2/5\,\lambda + (2+\lambda)\mu$, also

$$g_\lambda : x = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 - 2/5\,\lambda \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ 2+\lambda \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(b) Um die Projektion durchzuführen, müssen die Ebenen zunächst so verschoben werden, dass beide zu einem Unterräum werden, etwa um $(-2, 1/5, 0)$. Die verschobenen Ebenen sind dann

$$\tilde{F} : x_1 - x_3 = 0 \qquad \text{und} \qquad \tilde{E}_\lambda : 2x_1 - 5x_2 + \lambda x_3 = 0.$$

Die orthogonale Projektion auf $\tilde{F}$ wird jetzt beschrieben durch die Abbildungsmatrix

$$\begin{aligned} P &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Um $P$ auf einen Punkt auf $\tilde{E}_\lambda$ anzuwenden, benötigen wir noch eine Parameterdarstellung von $\tilde{E}_\lambda$. In a) haben wir schon einen Richtungsvektor bestimmt, $v_1 = (5, 2+\lambda, 5)^\top$. Ein zweiter Richtungsvektor ist $v_2 = (\lambda, \lambda, 3)^\top$ (nachprüfen, dass $v_1$, $v_2$ stets linear unabhängig sind!). Damit also

$$\tilde{E}_\lambda : \; x = \mu \begin{pmatrix} 5 \\ 2+\lambda \\ 5 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Berechne nun $Px$ für $x \in \tilde{E}_\lambda$:

$$Px = \mu \begin{pmatrix} 5 \\ 2+\lambda \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{\nu}{2} \begin{pmatrix} \lambda+3 \\ 2\lambda \\ \lambda+3 \end{pmatrix}.$$

Jetzt noch die Verschiebung um $(-2, 1/5, 0)^\top$ rückgängig machen.

Ist dies eine Ebene? Man zeigt, außer für $\lambda = 2$ sind $Pv_1$ und $Pv_2$ linear unabhängig. In diesem Fall hat die Projektion gerade $g_\lambda$ zum Ergebnis.

**Aufgabe T39:** Man bestimme die allgemeine Lösung des linearen Systems

$$u'(x) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} u(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Lösung T39:** Eigenwerte: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \ldots = (\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-3) \overset{!}{=} 0 \quad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = 3.$

Eigenvektoren: $\lambda_1 = 1: \begin{array}{rrr|r} 0 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = -2: \begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}$

$\Rightarrow \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \lambda_3 = 3: \begin{array}{rrr|r} -2 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Allgemeine Lösung: $u(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} e^x + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2x} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3x},\ x \in \mathbb{R}.$

**Aufgabe T40:** Man löse das Anfangswertproblem für die Funktion $x$ mit:

$$x''(t) + x'(t) - 6x(t) = 5e^{2t}, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -4$$

(a) klassisch (Exponentialansatz),

(b) mit Hilfe der Laplacetransformation.

**Lösung T40:**

(a) Das charakteristische Polynom lautet $p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda+3)(\lambda-2)$ also haben wir die Nullstellen $\lambda_1 = -3$ und $\lambda_2 = 2$. Ein Fundamentalsystem ist also $\{e^{-3t}, e^{2t}\}$. Da hier Resonanz vorliegt, verwenden wir den Ansatz $x_p(t) = ate^{2t}$, $x_p'(t) = a(1+2t)e^{2t}$, $x_p''(t) = a(4+4t)e^{2t}$ und erhalten damit eingesetzt in die Differentialgleichung $(a(4+4t)+a(1+2t)-6t)e^{2t} \overset{!}{=} 5e^{2t}$ und damit $a = 1$. Die allgemeine Lösung ist demnach $x(t) = te^{2t} + be^{-3t} + ce^{2t}$ mit der Ableitung $x'(t) = (1+2t)e^{2t} - 3be^{-3t} + 2ce^{2t}$. Aus den Anfangswerten erhalten wir die Bedingungen $x(0) = b + c \overset{!}{=} 0$ und $x'(0) = 1 - 3b + 2c \overset{!}{=} -4$ und damit $b = 1$ und $c = -1$. Die Gesamtlösung heisst also

$$x(t) = te^{2t} + e^{-3t} - e^{2t}.$$

(b) Setze $X := \mathcal{L}(x)$. Dann ist

$$\begin{aligned} s^2X + 4 + sX - 6X &= \frac{5}{s-2} \\ (s^2+s-6)X &= \frac{-4s+13}{s-2} \\ X &= \frac{-4s+13}{(s-2)^2(s+3)} \\ &\overset{!}{=} \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{(s-2)^2} = \frac{(A+B)s^2 + (-4A+B+C)s + 4A - 6B + 3C}{(s-2)^2(s+3)} \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt hier

$$\begin{array}{rcrcrcr} A & + & B & & & = & 0 \\ -4A & + & B & + & C & = & -4 \\ 4A & - & 6B & + & 3C & = & 13 \end{array}$$

mit der Lösung $A = 1$, $B = -1$ und $C = 1$. Also ist

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{s+3} - \frac{1}{s-2} + \frac{1}{(s-2)^2} \\ x(t) &= e^{-3t} - e^{2t} + te^{2t} \end{aligned}$$

**Aufgabe T41:** Gegeben sei die Differentialgleichung

$$2x^3u'''(x) + Bx^2u''(x) + xu'(x) - 10u(x) = 0, \quad x > 0.$$

(a) Bestimmen Sie $B$, so dass $u_1(x) = x^{\frac{5}{2}}$ die Differentialgleichung löst.

(b) Mit dem so gefundenen $B$ bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

**Lösung T41:**

(a) Die Ableitungen von $u_1$ lauten:

$$\begin{aligned} u_1'(x) &= \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} \\ u_1''(x) &= \frac{15}{4}x^{\frac{1}{2}} \\ u_1'''(x) &= \frac{15}{8}x^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Auf der linken Seite der Differentialgleichung erhalten wir damit:

$$2x^3\frac{15}{8}x^{-\frac{1}{2}} + Bx^2\frac{15}{4}x^{\frac{1}{2}} + x\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} - 10x^{\frac{5}{2}} = (15 + 15B + 10 - 40)\,\frac{x^{\frac{5}{2}}}{4} \stackrel{!}{=} 0.$$

Also muss $B = 1$.

(b) Wir lösen also die Eulersche Differentialgleichung

$$2x^3u'''(x) + x^2u''(x) + xu'(x) - 10u(x) = 0.$$

Dazu verwenden wir den Potenzansatz $u(x) = x^\lambda$ für $\lambda \in \mathbb{C}$. Das charakteristische Polynom lautet

$$p(\lambda) = 2\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 1) + \lambda(\lambda - 1) + \lambda - 10.$$

Wir wissen schon, dass $\lambda = \frac{5}{2}$ eine Nullstelle dieses Polynoms ist. Durch Polynomdivision erhalten wir

$$p(\lambda) = 2\lambda^3 - 5\lambda^2 + 4\lambda - 10 = (2\lambda - 5)\left(\lambda^2 + 2\right).$$

Die Nullstellen von $p(\lambda)$ sind also $\frac{5}{2}$, $\sqrt{2}i$ und $-\sqrt{2}i$ und somit die allgemeine reelle Lösung

$$u(x) = c_1x^{\frac{5}{2}} + c_2\cos(\sqrt{2}\ln(x)) + c_3\sin(\sqrt{2}\ln(x)), \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

**Aufgabe T42:** Gegeben sei die folgende Differentialgleichung

$$4u(x) - 2xu'(x) + x^3u'''(x) = 9, \quad x > 0.$$

(a) Geben Sie ein reelles Fundamentalsystem an.

(b) Berechnen Sie eine partikuläre Lösung durch Variation der Konstanten.

(c) Lösen Sie das Anfangswertproblem mit $u(1) = \frac{13}{4}$, $u'(1) = \frac{27}{4}$ und $u''(1) = \frac{50}{4}$.

**Lösung T42:** (a) Mit dem Ansatz $u(x) = x^\lambda$ lautet das charakteristische Polynom der homogenen Differentialgleichung

$$p(\lambda) = 4 - 2\lambda + \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = (\lambda - 2)^2(\lambda + 1)$$

mit den Nullstellen $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -1$ und zugehörigen Vielfachheiten $k_1 = 2$ und $k_2 = 1$. Damit erhalten wir das Fundamentalsystem

$$\{x^2, \ln(x)\,x^2, x^{-1}\}.$$

(b) Die Lösung des homogenen Problems lautet für $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

$$u_h(x) = c_1x^2 + c_2\ln(x)\,x^2 + c_3x^{-1}.$$

Damit erhalten wir durch Variation der Konstanten den folgenden Ansatz für eine partikuläre Lösung

$$u_p(x) = c_1(x)x^2 + c_2(x)\ln(x)\,x^2 + c_3(x)x^{-1}$$

mit den gesuchten Funktionen $c_1(x)$, $c_2(x)$ und $c_3(x)$. Eine Bedingung für diese Funktionen liefert die Tatsache, dass $u_p(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung sein muss. Die fehlenden zwei Bedingungen erhalten wir durch Ableiten der partikulären Lösung

$$\begin{aligned} u_p'(x) &= \underbrace{c_1'(x)x^2 + c_2'(x)\ln(x)\,x^2 + c_3'(x)x^{-1}}_{\stackrel{!}{=}0 \text{ 2. Bedingung}} + 2c_1(x)x + c_2(x)(x + 2\ln(x)\,x) - c_3(x)x^{-2}, \\ u_p''(x) &= \underbrace{2c_1'(x)x + c_2'(x)(x + 2\ln(x)\,x) - c_3'(x)x^{-2}}_{\stackrel{!}{=}0 \text{ 3. Bedingung}} + 2c_1(x) + c_2(x)(3 + 2\ln x) + 2c_3(x)x^{-3}, \\ u_p'''(x) &= 2c_1'(x) + c_2'(x)(3 + 2\ln x) + 2c_3'(x)x^{-3} + c_2(x)2x^{-1} - 6c_3(x)x^{-4}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die erste Bedingung zu

$$\begin{aligned}
9 &\stackrel{!}{=} 4u_p(x) - 2xu_p'(x) + x^3 u_p'''(x) \\
&= 4c_1(x)x^2 + 4c_2(x)\ln(x)\,x^2 + 4c_3(x)x^{-1} \\
&\quad - 4c_1(x)x^2 - 2c_2(x)(x^2 + 2\ln(x)\,x^2) + 2c_3(x)x^{-1} \\
&\quad + 2c_1'(x)x^3 + c_2'(x)(3 + 2\ln x)x^3 + 2c_3'(x) + c_2(x)2x^2 - 6c_3(x)x^{-1} \\
&= 2c_1'(x)x^3 + c_2'(x)(3 + 2\ln x)x^3 + 2c_3'(x).
\end{aligned}$$

Nach Division der zweiten Bedingung durch $x^2$ (erlaubt, da $x > 0$), der dritten Bedingung durch $x$ und der ersten Bedingung durch $x^3$ erhalten wir ein lineares Gleichungssystem in Abhängigkeit von $x$ und den Unbekannten $c_1'(x)$, $c_2'(x)$ und $c_3'(x)$:

$$\begin{array}{ccc|c}
2 & 3+2\ln x & 2x^{-3} & 9x^{-3} \\
\boxed{1} & \ln x & x^{-3} & 0 \\
2 & 1+2\ln x & -x^{-3} & 0
\end{array}
\to
\begin{array}{ccc|c}
0 & \boxed{3} & 0 & 9x^{-3} \\
\mathbf{1} & \ln x & x^{-3} & 0 \\
0 & 1 & -3x^{-3} & 0
\end{array}
\to
\begin{array}{ccc|c}
0 & \mathbf{1} & 0 & 3x^{-3} \\
\mathbf{1} & 0 & x^{-3} & -3x^{-3}\ln x \\
0 & 0 & \boxed{-3x^{-3}} & -3x^{-3}
\end{array}$$

$$\to
\begin{array}{ccc|c}
0 & \mathbf{1} & 0 & 3x^{-3} \\
\mathbf{1} & 0 & 0 & -3x^{-3}\ln x - x^{-3} \\
0 & 0 & \mathbf{1} & 1
\end{array}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
&c_1'(x) = -3x^{-3}\ln x - x^{-3},\ c_2'(x) = 3x^{-3},\ c_3'(x) = 1 \\
&c_1(x) = \frac{3}{2}x^{-2}\ln(x) + \frac{3}{4}x^{-2} + \frac{1}{2}x^{-2} = \frac{3}{2}x^{-2}\ln(x) + \frac{5}{4}x^{-2},\ c_2(x) = -\frac{3}{2}x^{-2},\ c_3(x) = x
\end{aligned}$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned}
u_p(x) &= c_1(x)x^2 + c_2(x)\ln(x)\,x^2 + c_3(x)x^{-1} = \frac{3}{2}\ln(x) + \frac{5}{4} - \frac{3}{2}\ln(x) + 1 \\
&= \frac{9}{4}.
\end{aligned}$$

(c)Die allgemeine Lösung und ihre Ableitungen bis zur zweiten Ordnung lauten

$$\begin{aligned}
u(x) &= u_h(x) + u_p(x) = c_1x^2 + c_2\ln(x)\,x^2 + c_3x^{-1} + \frac{9}{4}, \\
u'(x) &= 2c_1x + c_2(x + 2\ln(x)\,x) - c_3x^{-2}, \\
u''(x) &= 2c_1 + c_2(3 + 2\ln x) + 2c_3x^{-3}.
\end{aligned}$$

Damit ergeben sich folgende drei Gleichungen aus den Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned}
u(1) &= c_1 + c_3 + \frac{9}{4} = \frac{13}{4}, \\
u'(1) &= 2c_1 + c_2 - c_3 = \frac{27}{4}, \\
u''(1) &= 2c_1 + 3c_2 + 2c_3 = \frac{50}{4}.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir folgendes Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccc|c}
\boxed{1} & 0 & 1 & 1 \\
2 & 1 & -1 & \frac{27}{4} \\
2 & 3 & 2 & \frac{50}{4}
\end{array}
\to
\begin{array}{ccc|c}
\mathbf{1} & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & -3 & \frac{19}{4} \\
0 & \boxed{3} & 0 & \frac{21}{2}
\end{array}
\to
\begin{array}{ccc|c}
\mathbf{1} & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & \boxed{-3} & \frac{5}{4} \\
0 & \mathbf{1} & 0 & \frac{7}{2}
\end{array}
\to
\begin{array}{ccc|c}
\mathbf{1} & 0 & 0 & \frac{17}{12} \\
0 & 0 & \mathbf{1} & -\frac{5}{12} \\
0 & \mathbf{1} & 0 & \frac{7}{2}
\end{array}$$

mit der Lösung $c_1 = \frac{17}{12}$, $c_2 = \frac{7}{2}$ und $c_3 = -\frac{5}{12}$ und damit die Lösung des Anfangswertproblems

$$u(x) = \frac{17}{12}x^2 + \frac{7}{2}\ln(x)\,x^2 - \frac{5}{12}x^{-1} + \frac{9}{4}.$$

**Aufgabe T43:** Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$(x^2 + 1)u''(x) - 6u(x) = 0$$

durch Potenzreihenansatz um $x_0 = 0$ und geben Sie die Konvergenzbereiche an.

**Lösung T43:**

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,\ u'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1},\ u''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}$$

in die Dgl. eingesetzt liefert (mit $k(k-1) - 6 = (k-3)(k+2)$):

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^k + \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} - 6\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k &= 0 \\ \sum_{k=2}^{\infty} \{a_k(k-3) + a_{k+2}(k+1)\}(k+2)x^k + 2(a_2 - 3a_0) + 6(a_3 - a_1)x &\overset{!}{=} 0 \end{aligned}$$

und damit nach Koeffizientenvergleich folgende Rekursion:

$$a_2 = 3a_0,\ a_3 = a_1,\ a_{k+2} = -\frac{k-3}{k+1} a_k,\ k \geq 2.$$

Da $x^2 + 1 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, wissen wir, dass der Lösungsraum der DGL zweidimensional ist, vgl. Satz 2.11. Um 2 linear unabhängige Lösungen zu bestimmen, wählen wir geeignete Anfangswerte:
1.Lösung mit $a_0 = u_1(0) = 0,\ a_1 = u_1'(0) = 1 :\ a_3 = 1,\ a_k = 0,\ k \geq 4$ also $u_1(x) = x + x^3,\ x \in (-\infty, \infty)$;
2.Lösung mit $a_0 = u_2(0) = 1,\ a_1 = u_2'(0) = 0 :\ a_{2k+1} = 0, k \in \mathbb{N},\ a_{2k} = \frac{(-1)^k 3}{(2k-1)(2k-3)},\ k \in \mathbb{N}$ also: $u_2(x) = 3\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)(2k-3)} x^{2k}$ mit Konvergenzradius $R = 1$ (Quotientenkriterium!)
$\Rightarrow u(x) = c_1(x + x^3) + 3c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)(2k-3)} x^{2k}$. Falls $c_0 \neq 0$, dann muß $x \in (-1, 1)$ sein.

**Aufgabe T44:** Man bestimme die allgemeine Lösung des Systems

$$\begin{aligned} 3y'(t) &= -y(t) + 2z(t) + \sin t + 3\cos t, \\ 3z'(t) &= 4y(t) + z(t) - 4\sin t, \end{aligned}$$

mit Hilfe der Laplace-Transformation.
**Lösung T44:** $\mathcal{L}(\sin t) = \frac{1}{s^2+1},\ \mathcal{L}(\cos t) = \frac{s}{s^2+1},\ \mathcal{L}(y) = Y,\ \mathcal{L}(y') = sY - A,\ \mathcal{L}(z) = Z,\ \mathcal{L}(z') = sZ - B,\ A, B \in \mathbb{R}$ beliebig.
transferiertes System: $\left.\begin{array}{r} (3s+1)Y - 2Z = 3A + \frac{1+3s}{s^2+1} \\ -4Y + (3s-1)Z = 3B - \frac{4}{s^2+1} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} Y = \frac{A+B}{3}\frac{1}{s-1} + \frac{2A-B}{3}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s^2+1} \\ Z = \frac{2(A+B)}{3}\frac{1}{s-1} - \frac{2A-B}{3}\frac{1}{s+1} \end{array}$
mit $3K = A + B$ und $3L = 2A - B$ folgt $y(t) = Ke^t + Le^{-t} + \sin t,\quad z(t) = 2Ke^t - Le^{-t},\ K, L \in \mathbb{R}$.

**Aufgabe T45:**

(a) Berechnen Sie den Gradienten der Funktion $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} \tan(t)\ \exp(x_2 \cos t)\, dt\,.$$

(b) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $g : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ mit $g(s) = f(s, \cos s)$ an der Stelle $s = \pi/4$.

**Lösung T45:** Zur Bestimmung der partiellen Ableitung $\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}$ benötigen wir hier den Satz 4.3 über das Vertauschen von Abletiung und Integral. Verwenden Sie ohne den Beweis, dass $f$ die Voraussetzungen des Satzes erfüllt. Sei $H(t)$ die Stammfunktion von Integrand $\tan(t)\exp(x_2 \cos t)$, dann ist $f(x) = H(x_1) - H(0)$ und somit die partielle Ableitung

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \frac{\partial H(x_1)}{\partial x_1} - \frac{\partial H(0)}{\partial x_1} = \tan(x_1)\, e^{x_2 \cos x_1} - 0.$$

Für die zweite partielle Ableitung erhalten wir mit Hilfe des Satzes 4.3 und mit der Substitution $u = \cos t$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = \int_0^{x_1} \frac{\partial}{\partial x_2}(\tan t\, e^{x_2 \cos t})\, dt = \int_0^{x_1} \sin t\, e^{x_2 \cos t}\, dt = -\int_{\cos(0)}^{\cos(x_1)} e^{x_2 u}\, du = -\frac{1}{x_2} e^{x_2 u}\Big|_1^{\cos x_1} = \frac{1}{x_2}\left(e^{x_2} - e^{x_2 \cos x_1}\right).$$

Somit ist

$$\nabla f(x) = \left(\tan(x_1)\, e^{x_2 \cos x_1},\ \frac{1}{x_2}\left(e^{x_2} - e^{x_2 \cos x_1}\right)\right)^{\top}.$$

b) Mit der Kettenregel folgt

$$\begin{aligned} g'(s) &= \nabla f(s, \cos s) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\sin s \end{pmatrix} \\ &= \tan(s)\, e^{\cos^2 s} - \frac{\sin s}{\cos s}(e^{\cos s} - e^{\cos^2 s}) = (2e^{\cos^2 s} - e^{\cos s}) \tan s\,. \end{aligned}$$

Damit ist

$$g'(\pi/4) = 2\sqrt{e} - e^{1/\sqrt{2}}\,.$$