2. Übungsblatt
Aufgaben mit Lösungen

Aufgabe 6: Gegeben sind die folgenden Vektoren aus dem $\mathbb{R}^4$:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad z = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Linearkombinationen $u + v - z$, $2v - (w - z)$, $2u - v + 2w$.

(b) Zeigen Sie, dass die Vektoren u, v, w eine Basis des Raums $\operatorname{span}\{u, v, w\}$ darstellen.

(c) Was ist die Dimension von $\operatorname{span}\{u, v, w, z\}$?

Lösung 6:

(a) $u+v-z = (1, -4, -1, 2)^\top$, $\quad 2v-(w-z) = 2v-w+z = (7, 1, 8, -6)^\top$, $\quad 2u-v+2w = (-2, -2, -3, 3)^\top = -z$.

(b) Setze $\lambda u + \mu v + \nu w = 0$, λ, μ, $\nu \in \mathbb{R}$. Aus der Gleichung für die vierte Koordinate folgt $\mu = \nu$, und damit haben wir noch

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Mit der Gleichung für die erste Koordinate folgt $\lambda = -\mu$ und Einsetzen liefert dann $\lambda = 0$. Also ist $\lambda = \mu = \nu = 0$. Die Vektoren sind demnach linear unabhängig und bilden damit eine Basis des von ihnen aufgespannten Untervektorraums.

(c) Mit Teilaufgabe (a) folgt das $z \in \operatorname{span}\{u, v, w\}$ ist. Deshalb ist $\operatorname{span}\{u, v, w\} = \operatorname{span}\{u, v, w, z\}$. Nach Teilaufgabe (b) sind u, v, w aber linear unabhängig, die Dimension des von ihnen aufgespannten Teilraums ist damit gleich ihrer Anzahl, also 3.

Aufgabe 7: Für welches $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $x = (-7, \alpha, 2)^\top$ darstellbar als Linearkombination von $a^{(1)} = (1, 2, 4)^\top$, $a^{(2)} = (-2, 1, 2)^\top$ und $a^{(3)} = (3, 1, 2)^\top$? Berechnen Sie dann alle möglichen Linearkombination, die x erreichen.
Lösung 7: Wir suchen c_i mit $x(\alpha) = c_1 a^{(1)} + c_2 a^{(2)} + c_3 a^{(3)}$, dies führt auf ein lineares Gleichungssystem:

$$\left.\begin{array}{rrr|r} \boxed{1} & -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & 1 & \alpha \\ 4 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right. \rightarrow \left.\begin{array}{rrr|r} \mathbf{1} & -2 & 3 & -7 \\ 0 & \boxed{5} & -5 & \alpha + 14 \\ 0 & 10 & -10 & 30 \end{array}\right. \rightarrow \left.\begin{array}{rrr|r} \mathbf{1} & 0 & 1 & \frac{2}{5}\alpha - \frac{7}{5} \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & \frac{1}{5}\alpha + \frac{14}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -2\alpha + 2 \end{array}\right.$$

Hier sehen wir, dass $\alpha = 1$ gelten muss, damit x als Linearkombination dargestellt werden kann:

$$\left.\begin{array}{rrr|r} \mathbf{1} & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 3 \end{array}\right. \rightarrow x = (-1 - c_3)a^{(1)} + (3 + c_3)a^{(2)} + c_3 a^{(3)}, \; c_3 \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 8: Es bezeichne P_n den Vektorraum der reellen Polynome bis zum Grad n.

(a) Man zeige: $e_k := (1 + x)^k$, $k = 0, 1, 2, 3$ bilden eine Basis von P_3. Welche Dimension hat dieser Raum?

(b) Man stelle das Polynom $y = x^3 + 2x^2 + 1$ als Linearkombination der „Basisvektoren" e_k, $k = 0, 1, 2, 3$ dar.

Hinweis: Der „Nullvektor" in P_3 hat die Darstellung $0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0$.

Lösung 8: a) zu zeigen ist: wenn $\sum\limits_{k=0}^{3} \lambda_k e_k = 0$ gilt, dann folgt $\lambda_k = 0, \; k = 0, 1, 2, 3$.

$0 = \sum\limits_{k=0}^{3} \lambda_k (1 + x)^k = \lambda_0 + \lambda_1(1 + x) + \lambda_2(1 + 2x + x^2) + \lambda_3(1 + 3x + 3x^2 + x^3)$
$= (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + (\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3)x + (\lambda_2 + 3\lambda_3)x^2 + \lambda_3 x^3$
$\Rightarrow \lambda_3 = 0, \; \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \; \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \; \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$
$\Rightarrow \lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1 = \lambda_0 = 0$. Der Raum hat die Dimension 4.

b) $x^3 + 2x^2 + 1$ erfordert nach a) $\lambda_3 = 1, \; \lambda_2 + 3\lambda_3 = 2, \; \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \; \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$.
Dies ergibt $\lambda_3 = 1, \; \lambda_2 = -1, \; \lambda_1 = -1, \; \lambda_0 = 2$, also $x^3 + 2x^2 + 1 = 2 - (1 + x) - (1 + x)^2 + (1 + x)^3$

Aufgabe 9:

(a) Prüfen Sie jeweils, ob die angegebenen Vektoren linear unabhängig sind.

(i) $u = (1,1,0)^\top,\ v = (1,0,1)^\top,\ w = (0,1,1)^\top$;

(ii) $u = (1,2,3)^\top,\ v = (2,3,4)^\top,\ w = (3,4,5)^\top$;

(iii) $u^1 = (5,0,5,-4)^\top,\ u^2 = (0,5,-5,-3)^\top,\ u^3 = (5,-5,10,-1)^\top,\ u^4 = (-4,-3,-1,5)^\top$.

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $(2,1,3)^\top$, $(1,-1,2)^\top$ und $(-\alpha,4,-3)^\top$ linear abhängig? Stellen Sie für diese α den letzten Vektor als Linearkombination der ersten beiden dar.

Lösung 9:

(a) (i) $\lambda u + \mu v + \nu w = \begin{pmatrix} \lambda+\mu \\ \lambda+\nu \\ \mu+\nu \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{rrr|r} \boxed{1} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{rrr|r} \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{rrr|r} \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 \end{array}$$

Das resultierende LGS lautet:

$$\begin{array}{rrrcl} \lambda & +\mu & & = & 0 \\ & & 2\nu & = & 0 \\ & \mu & +\nu & = & 0 \end{array}$$

Wir können die Lösung bestimmen: $\nu = 0 \Rightarrow \mu = 0 \Rightarrow \lambda = 0$. Damit hat das LGS nur die triviale Lösung; u, v, w sind also linear unabhängig.

(ii) $\lambda u + \mu v + \nu w = \begin{pmatrix} \lambda+2\mu+3\nu \\ 2\lambda+3\mu+4\nu \\ 3\lambda+4\mu+5\nu \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{rrr|r} \boxed{1} & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{rrr|r} \mathbf{1} & 2 & 3 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{rrr|r} \mathbf{1} & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Wir können die letzte Spalte nicht pivotisieren; das resultierende LGS lautet:

$$\begin{array}{rrrcl} \lambda & +2\mu & +3\nu & = & 0 \\ & -\mu & -2\nu & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}$$

ν ist also unabhängige Variable und damit frei wählbar. Damit können wir μ und λ in Abhängigkeit von ν angeben: $\mu = -2\nu$ und $\lambda = \nu$. Dies bedeutet, dass alle Tripel der Form $(\lambda,\mu,\nu) = \nu \cdot (1,-2,1), \nu \in \mathbb{R}$, Lösungen des LGS sind; es ist insbesondere nicht eindeutig lösbar. u, v, w sind also linear abhängig.

(iii) $\lambda_1 u^1 + \lambda_2 u^2 + \lambda_3 u^3 + \lambda_4 u^4 = \begin{pmatrix} 5\lambda_1 + 5\lambda_3 - 4\lambda_4 \\ 5\lambda_2 - 5\lambda_3 - 3\lambda_4 \\ 5\lambda_1 - 5\lambda_2 + 10\lambda_3 - \lambda_4 \\ -4\lambda_1 - 3\lambda_2 - \lambda_3 + 5\lambda_4 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{rrrr|r} \boxed{5} & 0 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & -3 & 0 \\ 5 & -5 & 10 & -1 & 0 \\ -4 & -3 & -1 & 5 & 0 \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{rrrr|r} \mathbf{5} & 0 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & \boxed{5} & -5 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & -15 & 15 & 9 & 0 \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \left.\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{5} & 0 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & \mathbf{5} & -5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \lambda_3 \text{ beliebig} \\ \lambda_4 \text{ beliebig} \\ \lambda_2 = \lambda_3 + \frac{3}{5}\lambda_4 \\ \lambda_1 = -\lambda_3 + \frac{4}{5}\lambda_4 \end{array}$$

$\Rightarrow$ alle Quadrupel der Form $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4) = \lambda_3(-1,1,1,0) + \lambda_4(\frac{4}{5},\frac{3}{5},0,1),\ \lambda_3,\lambda_4 \in \mathbb{R}$ sind Lösung, u^1, u^2, u^3, u^4 sind linear abhängig.

(b) $\lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -\alpha \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda + \mu - \alpha\nu \\ \lambda - \mu + 4\nu \\ 3\lambda + 2\mu - 3\nu \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -\alpha & 0 \\ \boxed{1} & -1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{rrr|r} 0 & 3 & -\alpha-8 & 0 \\ \mathbf{1} & -1 & 4 & 0 \\ 0 & \boxed{5} & -15 & 0 \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & \boxed{5\text{-}5\alpha} & 0 \\ \mathbf{1} & -1 & 4 & 0 \\ 0 & \mathbf{5} & -15 & 0 \end{array}$$

Damit die Vektoren linear abhängig sind, muss das Gleichungssystem eine nichttriviale Lösung haben. Für $\alpha = 1$ ist die 1. Zeile allgemeingültig, also ν beliebig und das LGS hat eine nichttriviale Lösung.

Für die Darstellung von $(-1,4,-3)^\top$ als Linearkombination der ersten beiden Vektoren, lösen wir

$$\lambda\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\overset{!}{=}\begin{pmatrix}-1\\4\\-3\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{array}{cc|c}0&0&0\\\mathbf{1}&-1&4\\0&\mathbf{5}&-15\end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\0\\0\end{array}}\right\}\begin{array}{l}\mu=-3\\\lambda=1\end{array}$$

Die Rechnung haben wir oben schon gemacht und können das Ergebnis einfach vom Tableau ablesen.

Aufgabe 10: Im Vektorraum $C[0,1]$ der auf dem Intervall $[0,1]$ stetigen Funktionen sei U der von den beiden Polynomen $b^{(1)}(x)=1$ und $b^{(2)}(x)=x-\frac{1}{2}$ aufgespannte Untervektorraum. Wir definieren $y(x):=\sqrt{x}$ und das Skalarprodukt zweier Funktionen durch

$$\langle f,g\rangle:=\int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\,dx\in\mathbb{C}\,.$$

(a) Bestimmen Sie eine Linearkombination $c=a_1b^{(1)}+a_2b^{(2)}\in U$, so dass $c(0)=y(0)$ und $c(1)=y(1)$ gilt.

(b) Bestimmen Sie $d\in U$ mit dem geringsten Abstand zu y, d.h. der Abstandvektor $e=d-y$ soll senkrecht zu $b^{(1)}$ und $b^{(2)}$ sein. Zeichnen Sie y und die Näherungen c und d auf $[0,1]$ in ein Schaubild.
Anmerkung: Mit finiten Elementen rechnet man orthogonale Näherungen wie d aus.

Lösung 10:

(a) Es gilt $c(x)=a_1-\frac{1}{2}a_2+a_2x$. Aus $c(0)=y(0)=0$ erhalten wir die Gleichung $a_1-\frac{1}{2}a_2=0$ und aus $c(1)=y(1)=1$ die Gleichung $a_1+\frac{1}{2}a_2=1$. Das Gleichungssystem hat die Lösung $a_1=\frac{1}{2}$ und $a_2=1$, also ist $c(x)=x$.

(b) Sei $d(x)=\tilde{a}_1-\frac{1}{2}\tilde{a}_2+\tilde{a}_2x$, dann ist $e(x)=\tilde{a}_1-\frac{1}{2}\tilde{a}_2+\tilde{a}_2x-\sqrt{x}$. Damit e senkrecht auf $b^{(1)}$ und $b^{(2)}$ steht, sollen die Skalarprodukte 0 sein:

$$\langle e,b^{(1)}\rangle=0\qquad\text{und}\qquad\langle e,b^{(2)}\rangle=0$$

Die Berechnung des ersten Skalarprodukts

$$\begin{aligned}\langle e,b^{(1)}\rangle &= \int_0^1\left(\tilde{a}_1-\frac{1}{2}\tilde{a}_2+\tilde{a}_2x-\sqrt{x}\right)1\,dx\\ &= \left[(\tilde{a}_1-\frac{1}{2}\tilde{a}_2)x+\frac{1}{2}\tilde{a}_2x^2-\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1\\ &= \tilde{a}_1-\frac{1}{2}\tilde{a}_2+\frac{1}{2}\tilde{a}_2-\frac{2}{3}\overset{!}{=}0\end{aligned}$$

liefert $\tilde{a}_1=\frac{2}{3}$. Mit dem zweiten Skalarprodukt

$$\begin{aligned}\langle e,b^{(2)}\rangle &= \int_0^1\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\tilde{a}_2+\tilde{a}_2x-\sqrt{x}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)dx\\ &= \int_0^1\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\tilde{a}_2+\left(\frac{2}{3}-\tilde{a}_2\right)x+\tilde{a}_2x^2-x\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)dx\\ &= -\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\tilde{a}_2+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}-\tilde{a}_2\right)+\frac{1}{3}\tilde{a}_2-\frac{2}{5}+\frac{1}{3}=-\frac{1}{15}+\frac{1}{12}\tilde{a}_2\overset{!}{=}0\end{aligned}$$

erhalten wir $\tilde{a}_2=\frac{4}{5}$ und somit ist $d(x)=\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\left(x-\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{15}+\frac{4}{5}x$.

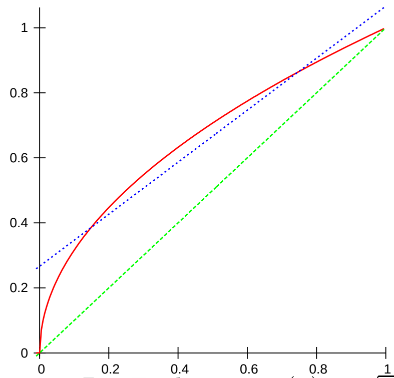
(Info) Die Funktionen $b^{(1)}$ und $b^{(2)}$ sind orthogonal zueinander:

$$\langle b^{(1)},b^{(2)}\rangle=\int_0^1 1\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}\right]_0^1=0$$

Damit kann man die Koeffizienten $\tilde{a}_1$ und $\tilde{a}_2$ auch ohne lineare Gleichungssystem über Projektionen ausrechnen, denn es gilt dann:

$$\tilde{a}_1=\frac{\langle b^{(1)},y\rangle}{\langle b^{(1)},b^{(1)}\rangle}=\frac{\frac{2}{3}}{1}\qquad\tilde{a}_2=\frac{\langle b^{(2)},y\rangle}{\langle b^{(2)},b^{(2)}\rangle}=\frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{12}}=\frac{4}{5}$$

Wir erhalten die Projektionen $\frac{2}{3}$ und $\frac{4}{5}(x-\frac{1}{2})$ und in der Summe genau die Funktion d. Leider sind die Basisfunktionen bei finiten Elementen nicht orthogonal zueinander, aber bei Fourierreihen werden wir diese Technik nutzen können.



Die Funktionen $y(x) = \sqrt{x}$ und die Näherungen $c(x) = x$ und $d(x) = \frac{4}{15} + \frac{4}{5}x$.