3. Übungsblatt
Aufgaben mit Lösungen

Aufgabe 6: Gegeben seien die Ebene $E: 4x_1 + x_3 + 8 = 0$, der Punkt $P = (2|1|1)$ und die Gerade $H: x(\lambda) = (4, 3, -2)^\top + \lambda(3, 1, -1)^\top$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie eine Gerade durch den Punkt P, die senkrecht auf E steht.

(b) Bestimmen Sie den Abstand von P zu E und den Punkt Q auf E, der P am nächsten ist.

(c) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden H mit E und den Punkt R auf H, der von P den geringsten Abstand hat.

Lösung 6:

(a) Der Richtungsvektor der gesuchten Gerade G ist der Normalenvektor $n = (4, 0, 1)^\top$ der Ebene E. Die Gerade ist also

$$G: x(\mu) = \overrightarrow{OP} + \mu \cdot n = (2, 1, 1)^\top + \mu\,(4, 0, 1)^\top, \qquad \mu \in \mathbb{R}.$$

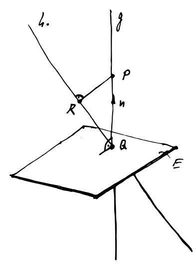
(b) Da G senkrecht auf E steht, ist offensichtlich der gesuchte Lotfußpunkt Q genau der Schnittpunkt $G \cap E$. Einsetzen liefert

$$0 = 4x_1 + x_3 + 8 = 4(2 + 4\mu) + (1 + \mu) + 8 = 17 + 17\mu,$$

also $\mu = -1$. Demnach ist $Q = (-2, 1, 0)^\top$. Der Verbindungsvektor von Q nach P ist demnach $(4, 0, 1)$, der Abstand von E zu P ist genau die Länge dieses Vektors, also $\sqrt{17}$. Alternativ, mit der Hesseschen Normalform von E,

$$d(P, E) = \left| \frac{4 \cdot 2 + 1 + 8}{\sqrt{17}} \right| = \frac{17}{\sqrt{17}} = \sqrt{17}.$$

(c) Den Schnittpunkt von H und E errechnet man leicht durch Ausrechnen,



$$0 = 4x_1 + x_3 + 8 = 4(4 + 3\lambda) + (-2 - \lambda) + 8 = 22 + 11\lambda,$$

also $\lambda = -2$. Der Schnittpunkt ist demnach $(-2, 1, 0)$, also gerade wieder Q.
Damit ist der Vektor $\overrightarrow{QR}$ gerade die Orthogonalprojektion von $\overrightarrow{QP}$ auf H (beachte, dass man den Richtungsvektor von H normieren muss, $(1/\sqrt{11})\,(3, 1, -1)^\top$):

$$\overrightarrow{QR} = \frac{1}{11}\left[\begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{11}\,(12 + 0 - 1)\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

Also ist $R = (1, 2, -1)^\top$.

Aufgabe 7: Gegeben seien die Punkte $P = (2|1|0)$, $Q = (1|3|-1)$ und $R = (0|2|0)$.

(a) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung und Normalform der Ebene E auf den Punkten P, Q, R.

(b) Schneidet die Gerade $G: x(u) = (-2, -7, 0)^\top + u(3, 2, 1)^\top$, $u \in \mathbb{R}$, die Ebene E? Wenn ja, bestimmen Sie Schnittpunkt und Schnittwinkel.

(c) Bestimmen Sie die Projektion des Richtungsvektors $(3, 2, 1)^\top$ der Geraden G auf den Normalenvektor der Ebene E, und bestimmen Sie damit und dem Schnittpunkt die Projektionsgerade H von G auf E.

Lösung 7:

(a) Die Parameterdarstellung der Ebene E wird durch

$$E: x\,(t, v) = \overrightarrow{OP} + t\overrightarrow{QP} + v\overrightarrow{RP} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$$

gegeben. Um die Normalform

$$x \cdot n = d$$

zu bestimmen, brauchen wir den Normalenvector n, der auf den Richtungsvektoren $\overrightarrow{QP}$ sowie $\overrightarrow{RP}$ senkrecht steht. Mit dem Ansatz $n = (a, b, c)^\top$ bekommen wir das System

$$0 = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = a - 2b + c \text{ und } 0 = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = 2a - b.$$

Aus der zweiten Gleichung schließen wir $b = 2a$. Einsetzen in die erste Gleichung ergibt dann $c = 2b - a = 3a$. Wir wählen $a = 1$ und erhalten $n = (1, 2, 3)^\top$. Jetzt fehlt uns für die Normalform noch der Parameter d. Wir setzen den Punkt P ein und erhalten

$$d = \overrightarrow{OP} \cdot n = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 4.$$

Die Ebene wird also durch

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = x \cdot n = 4 \tag{1}$$

gegeben. Um Hessesche Normalform zu gewinnen müssen wir den Vektor n noch normieren, d.h. n durch

$$\widehat{n} = \frac{n}{\|n\|} = (1, 2, 3)^\top / \sqrt{1 + 4 + 9} = (1, 2, 3)^\top / \sqrt{14}$$

ersetzen. Das ergibt die Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{14}} x_1 + \frac{2}{\sqrt{14}} x_2 + \frac{3}{\sqrt{14}} x_3 = \frac{4}{\sqrt{14}}.$$

(b) Wir setzen $x(u)$ in (1) ein und erhalten

$$4 = x(u) \cdot n = \left[(-2, -7, 0)^\top + u(3, 2, 1)^\top\right] \cdot (1, 2, 3)^\top = -16 + 10u.$$

Daraus finden wir $u = 20/10 = 2$. Der Schnittpunkt S wird durch

$$\overrightarrow{OS} = (-2, -7, 0)^\top + 2(3, 2, 1)^\top = (4, -3, 2)^\top$$

gegeben. Jetzt bestimmen wir den Winkel φ zwischen g und n :

$$\cos \varphi = \frac{(3, 2, 1)^\top \cdot (1, 2, 3)^\top}{\|(3, 2, 1)^\top\| \left\|(1, 2, 3)^\top\right\|} = \frac{10}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{5}{7}.$$

Der gesuchte Winkel zwischen G und E ist also $\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{5}{7}$.

(c) Der Normalenvektor lautet $n = (1, 2, 3)^\top$ mit $||n|| = \sqrt{14}$, für die Projektion p des Vektors $(3, 2, 1)^\top$ erhalten wir

$$p = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}{\sqrt{14}\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{5}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Die auf E projizierte Gerade hat damit den Richtungsvektor $(3, 2, 1)^\top - \frac{5}{7}(1, 2, 3)^\top = \frac{1}{7}(16, 4, -8)^\top$ und wir erhalten mit dem Schnittpunkt als Aufpunkt das Ergebnis

$$H:\ x(v) = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 16 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix},\ v \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 8: Gegeben sind die Gerade G und die Menge E in $\mathbb{R}^4$ durch $G:\ x = (0, 1, 0, -2)^\top + \lambda(2, 2, 1, 0)^\top,\ \lambda \in \mathbb{R},\quad E:\ 3x_1 + 4x_4 = 4$.

(a) Bestimmen Sie die Schnittmenge von G und E.

(b) Geben Sie die Menge F der Form $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = c$ an, die den Punkt $(1|0|0|0)$ enthält und senkrecht zu G ist.

(c) Bestimmen Sie alle Punkte auf G, die von der Menge E den gleichen Abstand wie von der Menge F aus Aufgabenteil (b) haben.

Lösung 8:

(a) Einsetzen der Parametrisierung von G in die Gleichung von E liefert:

$$3(0 + 2\lambda) + 4(-2 + 0\lambda) = 6\lambda - 8 \stackrel{!}{=} 4$$

Also ist $\lambda = 2$, damit ist $x = (0, 1, 0, -2)^\top + 2(2, 2, 1, 0)^\top = (4, 5, 2, -2)^\top$ und $G \cap E = \{(4, 5, 2, -2)^\top\}$.

(b) Die Menge F ist also senkrecht zu $n = (2,2,1,0)^\top$, damit lautet F in Normalform: $2x_1 + 2x_2 + x_4 = d$. Nun ist noch d zu bestimmen. Einsetzen des Punkts $(1,0,0,0)^\top$ liefert $d = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 2$. Die Menge F ist also gegeben durch $2x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$.

(c) Wir bestimmen die Abstände von Punkten auf G mit Hilfe der Hesse Normalformen:

$$
\begin{aligned}
d_E(x) &= \frac{3x_1 + 4x_4 - 4}{\sqrt{9+16}} = \frac{3(2\lambda) - 4(-2) - 4}{5} = \frac{6\lambda - 12}{5} \\
d_F(x) &= \frac{2x_1 + 2x_2 + x_3 - 2}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{4\lambda + 4\lambda + 2 + \lambda - 2}{3} = 3\lambda
\end{aligned}
$$

Die Punkte P1 und P2 haben jeweils den gleichen Abstand zu E und F.

Da die Hessesche Normalform den orientierten Abstand berechnet, bedeutet gleicher Abstand zu E und F einer der folgenden Fälle:

$d_E(\lambda) = d_F(\lambda)$: Also $6\lambda - 12 = 15\lambda$, oder $\lambda = -\frac{4}{3}$, damit ist

$$x = (-\frac{8}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}, -2)^\top .$$

$d_E(\lambda) = -d_F(\lambda)$: Also ist $6\lambda - 12 = -15\lambda$, und somit $\lambda = \frac{4}{7}$. Damit lautet der zweite Punkt

$$x = (\frac{8}{7}, \frac{15}{7}, \frac{4}{7}, -2)^\top .$$

Aufgabe 9: Gegeben seien die drei Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Stellen Sie fest, welche der folgenden Produkte definiert sind und berechnen Sie sie gegebenenfalls: AB, $BA^\top$, CA, $CA^\top$, $C^\top A^\top$, $B^\top C^\top A^\top$, $(BA^\top)^\top C^\top$, $(CB)^\top A$.

Lösung 9: Erst schreiben wir die transponierten Matrizen auf

$$A^\top = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \; B^\top = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \; C^\top = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es existieren folgende Produkte:

$$
\begin{aligned}
&BA^\top = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad C^\top A^\top = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad B^\top C^\top A^\top = \begin{pmatrix} 12 \\ 24 \\ 36 \end{pmatrix}, \\
&(BA^\top)^\top C^\top = AB^\top C^\top = \begin{pmatrix} -13 & 15 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 10: Leichtmatrose Hein Blöd erhält von Käptn Blaubär für 3 mal Küchendienst (K) und einmal Deck schrubben (S) einen Euro (E) und einen Purpurpudding (P). Für einmal Deck schrubben und vier Angelruten (R) erhält er ebenfalls einen Purpurpudding. Für zwei Angelruten und vier gefangene Fische (F) kann er sich in der Hafenkneipe eine Bärenlimo (L) gönnen. Außerdem erzählt ihm der Käptn für die Gegenleistung von α Fischen und einem Küchendienst eine seiner irren Seemannsgeschichten (G). Hierbei ist $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter, der von der Laune des Käptns abhängt. Stellen Sie zunächst die Abbildungsmatrix A_α auf, die die lineare Abbildung $(E,P,L,G)^\top \mapsto (K,S,R,F)^\top$ beschreibt. Für welche α ist diese Matrix invertierbar? Berechnen Sie für alle solche α die inverse Matrix und erläutern Sie deren Bedeutung im Hinblick auf Küchendienste, Deck schrubben, Angelruten und Fische.

Lösung 10: Die lineare Abbildung, nennen wir sie $\Phi : (E,P,L,G)^\top \mapsto (K,S,R,F)^\top$, die Euro (E), Purpurpudding (P), Bärenlimo (L) und Geschichten (G) in Küchendienste (K), Deck schrubben (S), Angelruten (R) und Fische (F) umrechnet, beschreibt eine Abbildung eines vierdimensionalen Raumes in einen zweiten vierdimensionalen Raum. Wir wählen eine Basis im Urbildraum von Φ

$$\mathbf{e}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

steht für einen Euro, Null Purpurpudding, Null Bärenlimos und Null Geschichten. Analog steht $\mathbf{e}^{(2)} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ für Null Euro, einen Purpurpudding, Null Bärenlimos und Null Geschichten, und $\mathbf{e}^{(3)}$ und $\mathbf{e}^{(4)}$ werden analog definiert. Wir wählen auch eine Basis im Bildraum:

$$\mathbf{f}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

steht für einen Küchendienst, Null mal Deck schrubben, Null Angelruten und Null Fische, $\mathbf{f}^{(2)} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ steht für keinen Küchendienst, ein mal Deck schrubben, Null Angelruten und Null Fische, und analog definieren wir $\mathbf{f}^{(3)}$ und $\mathbf{f}^{(4)}$. Laut Aufgabenstellung bildet Φ einen Euro (E) und einen Purpurpudding (P) ab auf 3 mal Küchendienst (K) und einmal Deck schrubben (S):

$$\Phi \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Außerdem bildet Φ einen Purpurpudding ab auf einmal Deck schrubben und vier Angelruten:

$$\Phi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Daneben bildet Φ aber auch eine Bärenlimo aus der Hafenkneipe ab auf zwei Angelruten und vier Fische:

$$\Phi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Schliesslich bildet Φ eine Seemannsgeschichte auf α Fische und einen Küchendienst ab:

$$\Phi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Da Φ eine lineare Abbildung ist, können wir (2) von (1) abziehen und finden, dass

$$\Phi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \Phi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Jetzt kennen wir die Bilder der vier Basisvektoren $\mathbf{e}^j$ unter Φ, $j = 1, \ldots, 4$. Also ist die Abbildungsmatrix A_α gleich

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen ihre Inverse:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & \boxed{2} & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} \boxed{3} & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 2 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 8 & -2 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4/3 & 4/3 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\alpha - 8/3} & -8/3 & 8 & -2 & 1 \end{array}\right) \overset{\alpha-8/3\neq0}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4/3 & 4/3 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{-8}{3\alpha-8} & \frac{24}{3\alpha-8} & \frac{-6}{3\alpha-8} & \frac{3}{3\alpha-8} \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 0 & 0 & 0 & \frac{3\alpha}{3\alpha-8} & \frac{-24}{3\alpha-8} & \frac{6}{3\alpha-8} & \frac{-3}{3\alpha-8} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \frac{4}{3} + \frac{32}{3}\frac{1}{3\alpha-8} & -4 - \frac{32}{3\alpha-8} & 1 + \frac{8}{3\alpha-8} & \frac{-4}{3\alpha-8} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{-8}{3\alpha-8} & \frac{24}{3\alpha-8} & \frac{-6}{3\alpha-8} & \frac{3}{3\alpha-8} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha}{3\alpha-8} & \frac{-8}{3\alpha-8} & \frac{2}{3\alpha-8} & \frac{-1}{3\alpha-8} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2\alpha}{3\alpha-8} & \frac{-6\alpha}{3\alpha-8} & \frac{3\alpha}{6\alpha-16} & \frac{-2}{3\alpha-8} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{-8}{3\alpha-8} & \frac{24}{3\alpha-8} & \frac{-6}{3\alpha-8} & \frac{3}{3\alpha-8} \end{array}\right)$$

Auf der rechten Seite der Matrix steht jetzt die Inverse A^{-1}, die für $\alpha \neq 8/3$ existiert. Das Matrixprodukt $A^{-1}(k, s, a, f)^\top$ beschreibt, wieviel Euro, Purpurpudding, Bärenlimo und Geschichten Hein B. für k Küchendienste, s mal Deck schrubben, r Angelruten und f Fische bekommt. Hierbei ist $(k, s, a, f)^\top = k\mathbf{f}^{(1)} + s\mathbf{f}^{(2)} + r\mathbf{f}^{(3)} + f\mathbf{f}^{(4)}$ ein Vektor im $\mathbb{R}^4$.