Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. F. Hettlich
Dr. S. Schmitt
Dipl.-Math. J. Kusch

Karlsruhe, den 12.04.2011

Lösungen zum 4. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik II für biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe 16: Berechnen Sie die Matrixprodukte AB^*, $BC^\top$ und $C^\top BA^\top$ für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2i & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 4i & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 2 & 2i & 0 \\ 3i & 3 & 3i \\ 0 & 4i & 4 \\ 0 & 0 & 5i \end{pmatrix}.$$

Lösung 16: Weil B reel ist, gilt

$$AB^* = AB^\top = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 6 & 8 \\ 4i & 2i & 4i & 6i & 8i \\ 12 & 12 & 12 & 18 & 24 \\ 8i & 4i & 8i & 12i & 16i \end{pmatrix}.$$

Außerdem ist

$$BC^\top = \begin{pmatrix} i & 2+4i & 6+12i & 12+8i & 15i \\ 2i & 4+2i & 3+12i & 8+4i & 10i \\ 3i & 6+4i & 6+12i & 4+8i & 5i \\ 4i & 8+6i & 9+18i & 8+12i & 10i \\ 5i & 10+8i & 12+24i & 12+16i & 15i \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $C^\top BA^\top$ kann folgendermaßen umgeformt werden: $C^\top BA^\top = (AB^\top C)^\top$. Weil B reel ist, können wir das Ergebnis von $AB^* = AB^\top$ nutzen, um $AB^\top C$ zu berechnen,

$$AB^\top C = AB^* C = \begin{pmatrix} 8+16i & 12+32i & 24+52i \\ -16+4i & -28+12i & -52+24i \\ 24+48i & 36+96i & 72+156i \\ -32+8i & -56+24i & -104+48i \end{pmatrix}.$$

Deshalb ist

$$C^\top BA^\top = (AB^\top C)^\top = \begin{pmatrix} 8+16i & -16+4i & 24+48i & -32+8i \\ 12+32i & -28+12i & 36+96i & -56+24i \\ 24+52i & -52+24i & 72+156i & -104+48i \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 17: Bestimmen Sie Abbildungsmatrizen zu den folgenden linearen Abbildungen.

(a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 3x_3 + x_1 + x_2 \\ 2x_2 + x_3 - x_1 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 \end{pmatrix}$.

(b) P_3 sei der Raum der reellen Polynome bis zum Grad 3, und $g : P_3 \to P_3$ bildet jedes Polynom auf seine Ableitung ab. Dabei soll die Darstellung bezüglich der Basis der Monome $\{1, x, x^2, x^3\}$ gelten.

Lösung 17:

(a) Wir bilden die Basisvektoren mit f ab und schreiben die Bildvektoren spaltenweise in eine Matrix. $f(1,0,0) = (1,-1,2)^\top$, $f(0,1,0) = (1,2,-3)^\top$ und $f(0,0,1) = (3,1,-1)^\top$. Also ist die Abbildungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) Die Ableitungen der Monome sind gegeben durch $\frac{d}{dx}x^j = jx^{j-1}$ ($j \in \mathbb{N}$). Also $g(1) = 0 = 0\cdot 1+0\cdot x+0\cdot x^2+0\cdot x^3$ das entspricht als Bildvektor dem Nullvektor. $g(x) = 1 = 1\cdot 1+0\cdot x+0\cdot x^2+0\cdot x^3$. Entspricht: $(1,0,0,0)^\top$. $g(x^2) = 2x = 0\cdot 1+2\cdot x+0\cdot x^2+0\cdot x^3$. Entspricht: $(0,2,0,0)^\top$. $g(x^3) = 3x^2 = 0\cdot 1+0\cdot x+3\cdot x^2+0\cdot x^3$. Entspricht: $(0,0,3,0)^\top$. Daher lautet die Abbildungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 18: Bestimmen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & \alpha & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

regulär ist und berechnen Sie die zugehörige Inverse in Abhängigkeit von α!

Lösung 18: Wir benutzen den Algorithmus von Gauß-Jordan zur Berechnung der Inversen:

$$\begin{array}{rrrr|rrrr}
\boxed{1} & 0 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
2 & -2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & \alpha & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
-1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
\mathbf{1} & 0 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -2 & 5 & 6 & -2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & \alpha & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & \boxed{1} & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
\mathbf{1} & 0 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \boxed{1} & 4 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 3+2\alpha & -1+\alpha & -\alpha & 0 & 1 & -\alpha \\
0 & \mathbf{1} & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
\mathbf{1} & 0 & 0 & 6 & 1 & 2 & 0 & 4 \\
0 & 0 & \mathbf{1} & 4 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & -13-7\alpha & -\alpha & -(3+2\alpha) & 1 & -6-5\alpha \\
0 & \mathbf{1} & 0 & 7 & 1 & 2 & 0 & 5 \\
\hline
\mathbf{1} & 0 & 0 & 6 & 1 & 2 & 0 & 4 \\
0 & 0 & \mathbf{1} & 4 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{\alpha}{13+7\alpha} & \frac{3+2\alpha}{13+7\alpha} & \frac{-1}{13+7\alpha} & \frac{6+5\alpha}{13+7\alpha} \\
0 & \mathbf{1} & 0 & 7 & 1 & 2 & 0 & 5 \\
\hline
\mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & \frac{13+\alpha}{13+7\alpha} & \frac{8+2\alpha}{13+7\alpha} & \frac{6}{13+7\alpha} & \frac{16-2\alpha}{13+7\alpha} \\
0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & \frac{-4\alpha}{13+7\alpha} & \frac{1-\alpha}{13+7\alpha} & \frac{4}{13+7\alpha} & \frac{2-6\alpha}{13+7\alpha} \\
0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \frac{\alpha}{13+7\alpha} & \frac{3+2\alpha}{13+7\alpha} & \frac{-1}{13+7\alpha} & \frac{6+5\alpha}{13+7\alpha} \\
0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \frac{13}{13+7\alpha} & \frac{5}{13+7\alpha} & \frac{7}{13+7\alpha} & \frac{23}{13+7\alpha}
\end{array}$$

Dabei muss $13+7\alpha \neq 0$ sein, d.h. $\alpha \neq -\frac{13}{7}$. Dann exisitiert die Inverse zu A und diese erhalten wir durch Umsortieren der einzelnen Zeilen:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{13+\alpha}{13+7\alpha} & \frac{8+2\alpha}{13+7\alpha} & \frac{6}{13+7\alpha} & \frac{16-2\alpha}{13+7\alpha} \\ \frac{13}{13+7\alpha} & \frac{5}{13+7\alpha} & \frac{7}{13+7\alpha} & \frac{23}{13+7\alpha} \\ \frac{-4\alpha}{13+7\alpha} & \frac{1-\alpha}{13+7\alpha} & \frac{4}{13+7\alpha} & \frac{2-6\alpha}{13+7\alpha} \\ \frac{\alpha}{13+7\alpha} & \frac{3+2\alpha}{13+7\alpha} & \frac{-1}{13+7\alpha} & \frac{6+5\alpha}{13+7\alpha} \end{pmatrix} = \frac{1}{13+7\alpha} \begin{pmatrix} 13+\alpha & 8+2\alpha & 6 & 16-2\alpha \\ 13 & 5 & 7 & 23 \\ -4\alpha & 1-\alpha & 4 & 2-6\alpha \\ \alpha & 3+2\alpha & -1 & 6+5\alpha \end{pmatrix}$$

Aufgabe 19: Bestimmen Sie die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ für die $Ax = y$ und $Ay = x$ für $x = (5,-5)^\top$ und $y = (-1,-7)^\top$ gilt. Wie lautet die Inverse von A?

Lösung 19: Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, damit erhalten wir aus den Bedingungen die Gleichungen:

$$Ax = y : \begin{pmatrix} 5a_{11} - 5a_{12} & = & -1 \\ 5a_{21} - 5a_{22} & = & -7 \end{pmatrix} \quad Ay = x : \begin{pmatrix} -a_{11} - 7a_{12} & = & 5 \\ -a_{21} - 7a_{22} & = & -5 \end{pmatrix}$$

Diese linearen Gleichungen mit den Unbekannten $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ lösen wir im Schema mit dem Gauß-Jordan Algorithmus.

$$
\left.\begin{array}{rrrr|r}
5 & -5 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 5 & -5 & -7 \\
\boxed{-1} & -7 & 0 & 0 & 5 \\
0 & 0 & -1 & -7 & -5
\end{array}\right.
\rightarrow
\begin{array}{rrrr|r}
0 & \boxed{-40} & 0 & 0 & 24 \\
0 & 0 & 5 & -5 & -7 \\
-\mathbf{1} & -7 & 0 & 0 & 5 \\
0 & 0 & -1 & -7 & -5
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{rrrr|r}
0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & -\frac{3}{5} \\
0 & 0 & 5 & -5 & -7 \\
\mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{5} \\
0 & 0 & \boxed{-1} & -7 & -5
\end{array}
$$

$$
\rightarrow
\begin{array}{rrrr|r}
0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & -\frac{3}{5} \\
0 & 0 & 0 & \boxed{-40} & -32 \\
\mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{5} \\
0 & 0 & \mathbf{1} & 7 & 5
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{rrrr|r}
0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & -\frac{3}{5} \\
0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \frac{4}{5} \\
\mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{5} \\
0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & -\frac{3}{5}
\end{array}
\rightarrow A = \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}
$$

Diese Matrix können wir mit dem Gauß-Jordan Algorithmus invertieren:

$$
\begin{array}{rr|rr}
-\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 1 & 0 \\
-\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 & 1
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{rr|rr}
\boxed{1} & \frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & 0 \\
-3 & 4 & 0 & 5
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{rr|rr}
\mathbf{1} & \frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & 0 \\
0 & \boxed{\frac{25}{4}} & -\frac{15}{4} & 5
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{rr|rr}
\mathbf{1} & 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\
0 & \mathbf{1} & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5}
\end{array}
$$

Also gilt hier $A^{-1} = A$, sie ist selbst-invers.

Aufgabe 20: Gegeben seien die parametrisierten Matrizen

$$
A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ -4 & 7 & \alpha \\ 8 & \alpha & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & -4+4i & 4 \\ -2\beta & 3 & \beta \\ 4 & 2-2i & 5 \end{pmatrix}.
$$

(a) Bestimmen Sie die Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta \in \mathbb{C}$ so, dass A orthogonal und B unitär ist.

(b) Berechnen Sie für die in a) berechneten Parameter die Längen der Vektoren Ax, Ay, Bx, Bz, sowie die Winkel zwischen Ax, Ay, sowie das Skalarprodukt $(Bx) \cdot (Bz)$ für $x = (4, 3, 0)^\top$, $y = (-3, 4, 0)^\top$ und $z = (2, i, -2)^\top$.

Lösung 20: a) Ist eine Matrix orthogonal bzw. unitär, so sind deren Zeilen (wie auch die Spalten) orthogonal zueinander. Es soll also gelten

$$
\text{für } A: \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = 8 - 4\alpha + 8 = 0, \text{ d.h. } \alpha = 4,
$$

$$
\text{für } B: \begin{pmatrix} -4+4i \\ 3 \\ 2-2i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ \overline{\beta} \\ 5 \end{pmatrix} = -16 + 16i + 3\overline{\beta} + 10 - 10i = 0, \text{ d.h. } \beta = 2 + 2i.
$$

Das ergibt

$$
A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ -4 & 7 & 4 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & -4+4i & 4 \\ -4-4i & 3 & 2+2i \\ 4 & 2-2i & 5 \end{pmatrix},
$$

entsprechend gilt

$$
AA^\top = A^\top A = \frac{1}{81}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ -4 & 7 & 4 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ -4 & 7 & 4 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{81}\begin{pmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix} = \mathbf{I},
$$

$$
BB^* = B^*B = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} -1 & -4+4i & 4 \\ -4-4i & 3 & 2+2i \\ 4 & 2-2i & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -4+4i & 4 \\ -4-4i & 3 & 2+2i \\ 4 & 2-2i & 5 \end{pmatrix} = \mathbf{I},
$$

also sind die Matrizen A und B tatsächlich orthogonal bzw. unitär.

b) Es gilt

$$
\|Ax\| = \|x\| = 5 \text{ und } \|Ay\| = \|y\| = 5,
$$
$$
\|Bx\| = \|x\| = 5 \text{ und } \|Bz\| = \|z\| = 3,
$$

da orthogonale bzw. unitäre Matrizen die Norm eines Vektors nicht verändern.

Analog gilt für den Winkel

$$
\measuredangle(Ax, Ay) = \measuredangle(x, y) = \pi/2,
$$

da $x \cdot y = 4 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 = 0$. Also sind die Vektoren Ax und Ay zueinander orthogonal.

Ferner ist

$$
(Bx) \cdot (Bz) = x \cdot z = 4 \cdot 2 - 3i = 8 - 3i,
$$

weil B unitär ist.