Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. F. Hettlich
Dr. S. Schmitt
Dipl.-Math. J. Kusch

Karlsruhe, den 12.04.2011

Lösungen zum 5. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik II für biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe 16: Gegeben seien zwei Vektoren $u, v \in \mathbb{C}^n$ mit $1 + v^\top u \neq 0$. Zeigen Sie, daß für die Matrix

$$B := I_n - \frac{uv^\top}{1 + v^\top u}$$

die folgenden Gleichungen gelten:

$$(I_n + uv^\top)B = I_n = B(I_n + uv^\top).$$

Lösung 16: Setze zur Abkürzung $q := 1 + v^\top u$. Dann ist wegen des Assoziativgesetzes

$$\begin{aligned}(I_n + uv^\top)(I_n - \frac{1}{q}uv^\top) &= I_n - \frac{1}{q}uv^\top + uv^\top - \frac{1}{q}(uv^\top)(uv^\top) = I_n + uv^\top - \frac{1}{q}(uv^\top + u\underbrace{(v^\top u)}_{\in\mathbf{R}}v^\top) \\ &= I_n + uv^\top - \frac{1}{q}(uv^\top + v^\top u\, uv^\top) = I_n + uv^\top - \frac{1}{q}(1 + v^\top u)uv^\top = I_n.\end{aligned}$$

Die andere Gleichung zeigt man analog.

Aufgabe 17: Die lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist bezüglich der Standardbasis durch die Abbildungsmatrix

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}$$

gegeben. Außerdem ist mit $b^{(1)} = (-1, 1)^\top$ und $b^{(2)} = (-3, 2)^\top$ eine Basis $B = \{b^{(1)}, b^{(2)}\}$ des $\mathbb{R}^2$ gegeben.

(a) Geben Sie die Basistransformationsmatrix an, die Vektoren $x = \alpha_1 b^{(1)} + \alpha_2 b^{(2)} = (\alpha_1, \alpha_2)_B^\top$ dargestellt bezüglich der Basis B in die entsprechende Darstellung $x = \beta_1 e^{(1)} + \beta_2 e^{(2)} = (\beta_1, \beta_2)^\top$ transformiert.

(b) Geben Sie die Basistransformationsmatrix an, die Vektoren bezüglich der Standardbasis zu Darstellungen bezüglich der Basis B transformiert.

(c) Geben Sie die Abbildungsmatrix der Abbildung Φ bezüglich der Basis B an. Beschreiben Sie Φ geometrisch.

Lösung 17:

(a) Die Basistransformationsmatrix soll die Einheitsvektoren auf $b^{(1)}$ und $b^{(2)}$ abbilden, also brauchen wir diese Vektoren nur in die Spalten zu schreiben, die Basistransformationsmatrix lautet also:

$$T = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Dies ist die umgekehrte Basistransformation, deshalb ist die Basistransformation gerade durch die Inverse T^{-1} gegeben, die wir mit dem Gauß-Algorithmus berechnen:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(c) Um die Darstellung der Abbildung bezüglich der Basis B zu bestimmen, multiplizieren wir die Darstellung bezüglich der Standardbasis von rechts mit T, um zunächst die bezüglich B dargestellten Vektoren zur Standardbasis darzustellen, und von links mit T^{-1}, um die Ergebnisse bzgl. der Standardbasis in die Darstellung zur Basis B zu transformieren:

$$T^{-1}AT = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Verglichen mit der Dreh-Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

erkennen wir, dass Φ zur (nicht orthogonalen!) Basis B eine Stauchung um den Faktor $\frac{1}{2}$ mit einer Drehung um $\frac{3}{2}\pi$, also $270°$ darstellt. Wie wir berechnet haben, ist $Ab^{(1)} = -\frac{1}{2}b^{(2)}$ und $Ab^{(2)} = \frac{1}{2}b^{(1)}$.

Aufgabe 18: Berechnen Sie die Determinanten

$$\text{(a) } D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}, \qquad \text{(b) } D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}, \qquad \text{(c) } D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{vmatrix}.$$

Lösung 18:

(a) Wir entwickeln nach der 1.Zeile:

$$D = a\begin{vmatrix} c & a \\ a & b \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} b & a \\ c & b \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} b & c \\ c & a \end{vmatrix} = a(bc - a^2) - b(b^2 - ac) + c(ab - c^2) = 3abc - (a^3 + b^3 + c^3).$$

(b) Wir subtrahieren zunächst die zweite Spalte von der dritten und dann die erste Spalte von der zweiten (das ändert nach Satz 1.43 die Determinante nicht),

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 6 \\ 4 & 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0.$$

Die letzte Gleichung gilt, da die Matrix zwei gleiche Spalten hat, also nicht regulär ist, deshalb muß die Determinante gleich Null sein (andere Argumentationen sind möglich ...).

(c) Wir wenden den Gauß-Algorithmus und Entwicklungsregel an:

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & 19 \\ 0 & 2 & 12 & 56 \\ 0 & 3 & 21 & 117 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & 19 \\ 0 & 0 & 2 & 18 \\ 0 & 0 & 6 & 60 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & 19 \\ 0 & 0 & 2 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 6 = 12. \end{aligned}$$

Aufgabe 19: Berechnen Sie die Determinante der Matrix $C := (AB)^{-1}$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 2 & 0 \\ 8 & -3 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } B := \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Lösung 19: Die Matrix AB ist genau dann regulär, wenn die Determinante von AB ungleich null ist. Wir nutzen aus, dass $\det(A\,B) = \det(A)\det(B)$. Für die Determinante der Matrix A ergibt such durch Entwickeln nach der jeweils letzten Zeile

$$\begin{aligned} \det(A) = \det(A^\top) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 2 & 0 \\ 8 & -3 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 0 \\ \mathbf{-2} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ \mathbf{-2} & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 2(-2)\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ \mathbf{2} & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot 2 \cdot (-2) \cdot 2 = 16. \end{aligned}$$

Nun wollen wir B auf Dreiecksform bringen, da sich die Determinante dann durch Multiplikation der Diagonalelemente ergibt. Dazu müssen wir die ersten vier Einträge der letzten Zeile auf Null bringen:

$$B := \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & \boxed{2} & -3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Nun hat diese Matrix Dreiecksgestalt, und wir erhalten die Determinante als Produkt der Diagonalelemente, insgesamt ergibt sich also

$$\det(A\,B) = \det(A)\,\det(B) = 16 \quad \cdot \quad ((-1)\cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (-1)) = 16 \cdot 4 = 64.$$

Da nun die Determinante von AB ungleich null $(= 64)$ ist, ist AB regulär und wir erhalten

$$\det(A\,B)^{-1} = \frac{1}{\det(A\,B)} = \frac{1}{64}.$$

Aufgabe 20: Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -2 \\ 2 & -1 & \alpha - 1 \\ -1 & \alpha + 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist A regulär?

b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist das LGS $Ax = b$ mit $b = (-2, 1, 3)^\top$ lösbar? Berechnen Sie die Lösungsmenge.

Lösung 20: a) A ist genau dann regulär, wenn $\det(A) \neq 0$ gilt:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \boxed{1} & \alpha & -2 \\ 2 & -1 & \alpha - 1 \\ -1 & \alpha + 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \alpha & -2 \\ 0 & -1-2\alpha & \alpha + 3 \\ 0 & 1 + 2\alpha & 1 \end{vmatrix} = (1+2\alpha) \begin{vmatrix} -1 & \alpha + 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1+2\alpha)(\alpha+4)$$

Für $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-\frac{1}{2}, -4\}$ ist A regulär.

b) Für $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-\frac{1}{2}, -4\}$ ist A regulär, demnach ist das LGS eindeutig lösbar; wir bestimmen die Lösungsmenge mit dem Gauß-Jordan-Algorithmus. Die Fälle $\alpha = -\frac{1}{2}$ und $\alpha = -4$ werden wir danach betrachten.

$$\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & \alpha & -2 & -2 \\ 2 & -1 & \alpha - 1 & 1 \\ -1 & \alpha+1 & 3 & 3 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \alpha & -2 & -2 \\ 0 & -1-2\alpha & \alpha+3 & 5 \\ 0 & 1+2\alpha & \boxed{1} & 1 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2+5\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -(1+2\alpha)(\alpha+4) & 0 & 2-\alpha \\ 0 & 1+2\alpha & \mathbf{1} & 1 \end{array}$$

Jetzt setzen wir voraus, dass $\alpha \notin \{-\frac{1}{2}, -4\}$:

$$\rightarrow \quad \begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2+5\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{\alpha-2}{(1+2\alpha)(\alpha+4)} \\ 0 & 1+2\alpha & \mathbf{1} & 1 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & -\frac{(\alpha-2)(2+5\alpha)}{(1+2\alpha)(\alpha+4)} \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \frac{\alpha-2}{(1+2\alpha)(\alpha+4)} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \frac{6}{\alpha+4} \end{array}$$

Für $\alpha = -\frac{1}{2}$ haben wir:

$$\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2}(!) \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \end{array}$$

Es ist also unlösbar, für $\alpha = -4$ lautet das Schema

$$\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & -18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6(!) \\ 0 & -7 & \mathbf{1} & 1 \end{array}$$

und auch hier ist das LGS unlösbar. Damit ist das LGS nur für $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-\frac{1}{2}, -4\}$ lösbar und die Lösungsmenge lautet dann $\mathcal{L} = \left\{(-\frac{(\alpha-2)(2+5\alpha)}{(1+2\alpha)(\alpha+4)}, \frac{\alpha-2}{(1+2\alpha)(\alpha+4)}, \frac{6}{\alpha+4})^\top\right\}$.