Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. F. Hettlich
Dr. S. Schmitt
Dipl.-Math. J. Kusch

Karlsruhe, den 26.05.2011

Lösungen zum 7. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik II für biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe 31: Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'''(x) - \frac{2}{x}y''(x) + \frac{5}{x^2}y'(x) - \frac{5}{x^3}y(x) = 0$$

für $x > 0$. Prüfen Sie, ob die folgenden Funktionen Lösungen dieser Differentialgleichung sind:

(a) $y_1(x) = \sin(x^2)$,

(b) $y_2(x) = x$,

(c) $y_3(x) = \exp(\frac{2}{x})$,

(d) $y_4(x) = x^2 \cos(\ln(x))$.

Lösung 31:

(a) Die Ableitungen von y_1 lauten:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= 2x\cos(x^2) \\ y_1''(x) &= -4x^2\sin(x^2) + 2\cos(x^2) \\ y_1'''(x) &= -12x\sin(x^2) - 8x^3\cos(x^2) \end{aligned}$$

Auf der linken Seite der Differentialgleichung erhalten wir damit:

$$-12x\sin(x^2) - 8x^3\cos(x^2) + 8x\sin(x^2) - \frac{4}{x}\cos(x^2) + \frac{10}{x^2}\cos(x^2) - \frac{5}{x^3}\sin(x^2) \not\equiv 0$$

Dies ist also sicher keine Lösung der DGL.

(b) Die erste Ableitung von y_2 ist $y_2'(x) = 1$ und alle folgenden 0. Somit erhalten wir auf der linken Seite der DGL

$$\frac{5}{x^2} - \frac{5}{x^3}x = 0$$

und so ist y_2 eine Lösung der DGL.

(c) Wir bestimmen die Ableitungen von y_3:

$$\begin{aligned} y_3'(x) &= -\frac{2}{x^2}\exp(\frac{2}{x}) \\ y_3''(x) &= (\frac{4}{x^4} + \frac{4}{x^3})\exp(\frac{2}{x}) \\ y_3'''(x) &= (-\frac{12}{x^4} - \frac{24}{x^5} - \frac{8}{x^6})\exp(\frac{2}{x}) \end{aligned}$$

Und in der linken Seite der DGL ergibt dies:

$$\left(-\frac{12}{x^4} - \frac{24}{x^5} - \frac{8}{x^6} - \frac{8}{x^5} - \frac{8}{x^4} - \frac{10}{x^4} - \frac{5}{x^3}\right)\exp(\frac{2}{x}) \not\equiv 0$$

Auch dies kann keine Lösung sein.

(d) Die Ableitungen von y_4:

$$\begin{aligned} y_4'(x) &= 2x\cos(\ln(x)) - x\sin(\ln(x)) \\ y_4''(x) &= \cos(\ln(x)) - 3\sin(\ln(x)) \\ y_4'''(x) &= -\frac{1}{x}\sin(\ln(x)) - \frac{3}{x}\cos(\ln(x)) \end{aligned}$$

In der Differentialgleichung erhalten wir damit:

$$\frac{1}{x}\big(-\sin(\ln(x)) - 3\cos(\ln(x)) - 2\cos(\ln(x)) + 6\sin(\ln(x)) + 10\cos(\ln(x)) - 5\sin(\ln(x)) - 5\cos(\ln(x))\big) = 0$$

Damit haben wir mit y_4 eine weitere Lösung dieser Differentialgleichung. Eine weitere zu den vorherigen unabhängige Lösung ist $y_5(x) = x^2\sin(\ln(x))$.

Aufgabe 32: Geben Sie zu den folgenden homogenen linearen Differentialgleichungen jeweils die reelle allgemeine Lösung an:

(a) $x^2u''(x) - 5xu'(x) + 13u(x) = 0,\ x > 0,$

(b) $u''(x) - 5u'(x) + 13u(x) = 0,\ x > 0,$

(c) $u'''(x) - \frac{3}{x}u''(x) + \frac{7}{x^2}u'(x) - \frac{8}{x^3}u(x) = 0,\ x > 0.$

Lösung 32:

(a) Das ist eine Euler-DGL. Der Ansatz $u(x) = x^\lambda$ liefert das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = (\lambda^2 - \lambda) - 5\lambda + 13 = \lambda^2 - 6\lambda + 13$$

mit den Nullstellen $\lambda_{1,2} = 3 \pm 2i$. Damit erhalten wir das reelle Fundamentalsystem

$$\{x^3\cos(2\ln(x)), x^3\sin(2\ln(x))\}$$

und die reelle allgemeine Lösung

$$u(x) = c_1x^3\cos(2\ln(x)) + c_2x^3\sin(2\ln(x)).$$

(b) Es liegt eine homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten vor. Mit dem Ansatz $u(x) = e^{\lambda x}$ bekommen wir das charakteristische Polynom dieser homogenen linearen Gleichung

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 13$$

mit den Nullstellen $\lambda_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \frac{i3\sqrt{3}}{2}$. Damit erhalten wir ein komplexes Fundamentalsystem

$$\left\{e^{x(\frac{5}{2}+\frac{i3\sqrt{3}}{2})}, e^{x(\frac{5}{2}-\frac{i3\sqrt{3}}{2})}\right\}$$

und damit folgendes reeles Fundamentalsystem

$$\left\{e^{\frac{5}{2}x}\cos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}x\right), e^{\frac{5}{2}x}\sin\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}x\right)\right\}$$

und die reelle allgemeine Lösung

$$u(x) = c_1e^{\frac{5}{2}x}\cos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2e^{\frac{5}{2}x}\sin\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}x\right).$$

(c) Das charakteristische Polynom lautet bei dieser Euler-DGL (Ansatz $u(x) = x^\lambda$)

$$p(\lambda) = (\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda) - 3(\lambda^2 - \lambda) + 7\lambda - 8 = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = (\lambda - 2)^3$$

und bei dieser dreifachen Nullstelle 2 lautet ein Fundamentalsystem

$$\{x^2, \ln(x)x^2, \ln^2(x)x^2\}$$

und die reelle allgemeine Lösung

$$u(x) = c_1x^2 + c_2\ln(x)x^2 + c_3\ln^2(x)x^2.$$

Aufgabe 33: Lösen Sie die Anfangswertaufgabe

$$x^4u''''(x) + 6x^3u'''(x) - 2xu'(x) + 20u(x) = 0 \quad x > 0.$$

mit $u(1) = 0$, $u'(1) = 4$, $u''(1) = 5$, $u'''(1) = 24$.

Lösung 33: Der Potenzansatz $u(x) = x^\lambda$ liefert uns die Gleichung

$$((\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda-1)\lambda + 6(\lambda-2)(\lambda-1)\lambda - 2\lambda + 20)\,x^\lambda = (\lambda^4 - 7\lambda^2 + 4\lambda + 20)x^\lambda \overset{!}{=} 0\,,$$

die unabhängig von x erfüllt ist, wenn $\lambda^4 - 7\lambda^2 + 4\lambda + 20 = 0$. Durch Raten der Nullstellen $\lambda_{1,2} = -2$, Polynomdivision und quadratischer Ergänzung erhalten wir

$$\lambda^4 - 7\lambda^2 + 4\lambda + 20 = (\lambda+2)(\lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda + 10) = (\lambda+2)^2(\lambda^2 - 4\lambda + 5) = (\lambda+2)^2\left((\lambda-2)^2 + 1\right)$$

Wir haben damit die Nullstellen $\lambda_{1,2} = -2$, $\lambda_{3,4} = 2 \pm i$. Aus der reellen Nullstelle erhalten wir $u_1(x) = x^{-2}$, und da die Nullstelle doppelt ist, mit Rettungsfaktor $u_2(x) = \ln(x)x^{-2}$. Die komplexen Nullstellen ergeben $u_3(x) = x^2\sin(\ln x)$ und $u_4(x) = x^2\cos(\ln x)$. Damit lautet die allgemeine reelle Lösung:

$$u(x) = C_1x^{-2} + C_2\ln(x)x^{-2} + C_3x^2\sin(\ln x) + C_4x^2\cos(\ln x)$$

für $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$.

die Ableitungen sind:
$u'(x) = -2c_1x^{-3} + c_2x^{-3} - 2c_2\ln(x)x^{-3} + c_3x\cos(\ln(x)) + 2c_3x\sin(\ln(x)) - c_4x\sin(\ln(x)) + 2c_4x\cos(\ln(x))$,
$u''(x) = 3c_3\cos(\ln(x)) + c_4\cos(\ln(x)) + c_3\sin(\ln(x)) - 3c_4\sin(\ln(x)) + 6c_1x^{-4} - 5c_2x^{-4} + 6c_2\ln(x)x^{-4}$,
$u'''(x) = 26c_2x^{-5} - 24c_1x^{-5} - 24c_2\ln(x)x^{-5} - 3c_4\cos(\ln(x))x^{-1} - 3c_3\sin(\ln(x))x^{-1} - c_4\sin(\ln(x))x^{-1} + c_3\cos(\ln(x))/x$.
Mit den Anfangswerten bekommen wir:
$u(1) = C1 + C_4 = 0$,
$u'(1) = -2C_1 + C_2 + C_3 + 2C_4 = 4$,
$u''(1) = 6C_1 - 5C_2 + 3C_3 + C_4$,
$u'''(1) = -24C_1 + 26C_2 + C_3 - 3C_4$.

Damit folgt das Tableau

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 6 & -5 & 3 & 1 & 5 \\ -24 & 26 & 1 & -3 & 24 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & -5 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 26 & 1 & 21 & 24 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 24 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 15/8 & 25/8 \\ 0 & 0 & 1 & 83/25 & 80/25 \end{array}$$

$$\rightarrow \quad \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 24 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 15/8 & 25/8 \\ 0 & 0 & 0 & 289/200 & 3/40 \end{array}$$

Daraus bekommen wir sofort $C_1 = -15/289$, $C_2 = 13/17$, $C_3 = 875/289$ und $C_4 = 15/289$. Somit lautet die Lösung des Anfangwertproblems

$$u(x) = -15/289\,x^{-2} + 13/17\,\ln(x)x^{-2} + 875/289\,x^2\sin(\ln x) + 15/289\,x^2\cos(\ln x).$$

Aufgabe 34: Bestimmen Sie die reelle allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$y'''(x) + 2y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

Lösung 34: Die charakteristische Gleichung lautet: $\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$. Wir erhalten $\lambda_1 = -1$ durch raten, und die restlichen Nullstellen nach Polynomdivision: $(\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 1) : (\lambda + 1) = \lambda^2 + \lambda + 1$. Also gilt $\lambda_{2,3} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{1-4}) = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ also $\lambda_2 = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$ und $\lambda_3 = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$.

Die allgemeine komplexe Lösung lautet somit

$$y(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{(-1+i\sqrt{3})x/2} + c_3e^{(-1-i\sqrt{3})x/2}\,.$$

Nutzen wir jetzt die Eulersche Formel $e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$ können wir durch geschicktes lineares Kombinieren von $y_2(x) = e^{-x/2}(\cos(\sqrt{3}x/2) + i\sin(\sqrt{3}x/2))$ und $y_3(x) = e^{-x/2}(\cos(\sqrt{3}x/2) - i\sin(\sqrt{3}x/2))$ reelle Funktionen bestimmen: $\tilde{y}_2(x) = \frac{1}{2}(y_2(x) + y_3(x)) = e^{-x/2}\cos(\sqrt{3}x/2)$ und $\tilde{y}_3(x) = \frac{1}{2i}(y_2(x) - y_3(x)) = e^{-x/2}\sin(\sqrt{3}x/2)$. Somit lautet die reelle allgemeine Lösung:

$$y(x) = a_1e^{-x} + a_2e^{-x/2}\cos(\sqrt{3}x/2) + a_3e^{-x/2}\sin(\sqrt{3}x/2)$$

Aufgabe 35: Zeigen Sie, dass $u(x) = e^{x^2}$ die Differentialgleichung

$$u''(x) - 2xu'(x) - 2u(x) = 0, \quad x \in (0, \infty),$$

löst. Bestimmen Sie eine weitere linear unabhängige Lösung mit der Methode der Reduktion der Ordnung.

Hinweis: Ein Integral der Form $\int e^{-x^2}\,dx$ ist nicht elementar integrierbar, lassen Sie es im Ergebnis stehen.

Lösung 35: $u(x) = e^{x^2}$, also $u'(x) = 2xe^{x^2}$ und $u''(x) = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2}$. Einsetzen in die Gleichung liefert

$$2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} - 4x^2e^{x^2} - 2e^{x^2} = 0,$$

also ist u Lösung der DGL.
Der Reduktionsansatz $u_2(x) = v(x)e^{x^2}$ liefert $u_2'(x) = v'(x)e^{x^2} + v(x)2xe^{x^2}$ und $u_2''(x) = v''(x)e^{x^2} + 4xv'(x)e^{x^2} + v(x)\left[2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2}\right]$. Setzt man dies in die ursprüngliche DGL ein, so erhält man

$$v''(x)e^{x^2} + v'(x)2xe^{x^2} = 0.$$

Wir setzen $w = v'$ und haben $w'(x)e^{x^2} + 2xw(x)e^{x^2} = 0$ bzw. $w'(x) + 2xw(x) = 0$. Wir haben somit die Ordnung um Eins reduziert. Dies ist eine DGL in getrennten Veränderlichen, die wir folgendermaßen lösen:

$$\frac{w'(x)}{w(x)} = -2x, \quad \text{also} \quad \int \frac{w'(x)}{w(x)}\,dx = -\int 2x,$$

oder $\ln|w| = -x^2$ (Integrationskonstante willkürlich zu 0 gesetzt), also $w = e^{-x^2}$. Da w ja die Ableitung von v war, bekommen wir v durch Integration von w, also $v = \int w(x)dx = \int e^{-x^2}dx$. Dieses letzte Integral ist nicht elementar lösbar. Wir haben also die zweite Lösung

$$u_2(x) = u(x) \cdot v(x) = e^{x^2} \int e^{-x^2}dx.$$