8. Übungsblatt
Aufgaben mit Lösungen

Aufgabe 36: Gegeben sei die folgende Differentialgleichung für y in $x \in \mathbb{R}$: $y'''(x) + y''(x) - 4y'(x) - 4y(x) = 0$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung $y(x)$.

(b) Sei $u_1(x) = y(x)$, $u_2(x) = y'(x)$ und $u_3(x) = y''(x)$. Stellen Sie die Ableitungen u_k', $k = 1,2,3$ durch die Funktionen u_l, $l = 1,2,3$ dar und damit ein lineares System für $u(x)$ auf.

(c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des linearen Systems aus Ihren Ergebnissen aus Aufgabenteil (a).

Lösung 36:

(a) Das charakteristische Polynom lautet $p(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda + 1)$ und wir erhalten die allgemeine Lösung

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{-x}, \; C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

(b) Es gilt $u_1'(x) = u_2(x)$ und $u_2'(x) = u_3(x)$. Für $u_3'(x)$ stellen wir zunächst die Differentialgleichung um und erhalten:

$$u_3'(x) = y'''(x) = -y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = 4u_1(x) + 4u_2(x) - u_3(x)$$

Das lineare System für u lautet damit:

$$u'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix} u(x)$$

(c) Da ja $u_1(x) = y(x)$, $u_2(x) = y'(x)$ und $u_3(x) = y''(x)$ erhalten wir aus der allgemeinen Lösung:

$$\begin{array}{rclcl} u_1(x) & = & y(x) & = & C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{-x} \\ u_2(x) & = & y'(x) & = & 2C_1 e^{2x} - 2C_2 e^{-2x} - C_3 e^{-x} \\ u_3(x) & = & y''(x) & = & 4C_1 e^{2x} + 4C_2 e^{-2x} + C_3 e^{-x} \end{array}$$

In Vektorschreibweise ergibt dies:

$$u(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ u_3(x) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} e^{2x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} e^{-2x} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x}, \; C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$$

Allgemein kann so jede gewöhnliche Differentialgleichung höherer Ordnung (auch mit nicht konstanten Koeffizienten) in dein lineares System von Differentialgleichung höherer Dimension erster Ordnung umgeschrieben werden.

Aufgabe 37: Man löse das Anfangswertproblem für das komplexe lineare System

$$u'(x) = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{1}{7}i & \dfrac{6}{7} \\ -\dfrac{65}{42} + i & -1 + \dfrac{5}{7}i \end{pmatrix} u(x), \quad x \in [0, \infty), \quad u(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung 37: Zunächst werden die Eigenwerte mit Hilfe des charakteristischen Polynoms bestimmt:

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{7}i - \lambda & \frac{6}{7} \\ -\frac{65}{42} + i & -1 + \frac{5}{7}i - \lambda \end{pmatrix} = \ldots = \lambda^2 - \frac{4}{7}ix + \frac{3}{7}.$$

Die Nullstellen sind $\lambda_1 = i$ und $\lambda_2 = -\frac{3}{7}i$.
Für die Eigenvektoren bestimmen wir eine nichttriviale Lösung des Gleichungssystems $(A - \lambda I)v = 0$. Da bei den zwei Zeilen genau eine wegfallen muss, denn wir kennen schon die Eigenwerte, erhalten wir die Eigenwerte hier schnell aus der ersten Zeile: Für $\lambda_1 = i$ ist die erste Zeile $(7 - i - 7i)x_1 + 6x_2 = 0$, hier wählen wir $x_1 = 6$ und erhalten $x_2 = -7 + 8i$, bzw. den Eigenvektor $v_1 = (6, -7 + 8i)^\top$. Für $\lambda_2 = -\frac{3}{7}i$ lösen wir $(7 - i + 3i)x_1 + 6x_2 = 0$: mit $x_1 = 6$ ist $x_2 = -7 - 2i$ und somit $v_2 = (6, -7 - 2i)^\top$.
Die allgemeine Lösung lautet

$$u(x) = c_1 \begin{pmatrix} 6 \\ -7 + 8i \end{pmatrix} e^{ix} + c_2 \begin{pmatrix} 6 \\ -7 - 2i \end{pmatrix} e^{-\frac{3}{7}ix}, \; c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

Im letzten Schritt passen wir die allgemeine Lösung an die Anfangswerte an, $u(0) = (1,2)^\top$ führt zu $6c_1 + 6c_2 = 1$, und $(-7+8i)c_1 + (-7-2i)c_2 = 2$. Die Lösung lautet $c_1 = \frac{1}{30} - \frac{19}{60}i$ und $c_2 = \frac{2}{15} + \frac{19}{60}i$. Damit ist

$$u(x) = \left(\frac{1}{30} - \frac{19}{60}i\right)\begin{pmatrix} 6 \\ -7+8i \end{pmatrix} e^{ix} + \left(\frac{2}{15} + \frac{19}{60}i\right)\begin{pmatrix} 6 \\ -7-2i \end{pmatrix} e^{-\frac{3}{7}ix}, \ x \in [0,\infty).$$

Aufgabe 38: Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$ und beweisen Sie mit Hilfe der Wronski-Determinante, dass die Lösungsfunktionen ein Fundamentalsystem bilden.

Lösung 38: Eine lineare homogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten löst man mit dem Ansatz

$$u = e^{\lambda x}.$$

Setzen wir dies in die Differentialgleichung ein, erhalten wir:

$$e^{\lambda x}(\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8) = e^{\lambda x}(\lambda - 2)^3 = 0$$

Somit haben wir wegen der dreifachen Nullstelle 2 die Lösungen $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = xe^{-2x}$, $y_3 = x^2e^{2x}$. Die Wronskideterminante ist wie folgt:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{2x} & x \cdot e^{2x} & x^2 \cdot e^{2x} \\ 2 \cdot e^{2x} & (2x+1) \cdot e^{2x} & (2x^2+2x) \cdot e^{2x} \\ 4 \cdot e^{2x} & (4x+4) \cdot e^{2x} & (4x^2+8x+2) \cdot e^{2x} \end{vmatrix}$$

Unsere Funktionen sind ein Fundamentalsystem, wenn $W(x)$ für ein x nicht verschwindet, damit ist $W(x)$ dann für alle x nicht null. Wir wählen $x = 0$:

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

Somit sind y_1, y_2 und y_3 ein Fundamentalsystem.

Aufgabe 39: Geben Sie für die folgenden Differentialgleichungen für $y = y(x)$ die Nullstellen der charakteristischen Polynome und geeignete Ansätze vom Typ der rechten Seite an:

(a) $y'' + y = x \sin x$

(b) $y''' - 4y'' - 2y' + 20y = x^2e^x$

(c) $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = xe^{-2x}$

(d) $y''' + y'' - 6y' = xe^{2x} + 2e^{-3x}$

(e) $y^{(4)} + 4y''' + 6y'' + 4y' + 5y = -8\cos x - 8 \sin x$

(f) $y^{(5)} + y^{(4)} - 4y''' - 16y'' - 20y' - 12y = e^{-3x}$

Hinweise: Eine Lösung in (e) lautet $y(x) = x\cos(x)$, in (f) lautet eine Lösung des homogenen Problems $y(x) = x\sin(x)e^{-x}$.

Lösung 39:

(a) Das charakteristische Polynom lautet $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$ und hat die Nullstellen $+i, -i$, also liegt bei der gegebenen rechten Seite eine Resonanz vor. Deshalb lautet der Ansatz hier

$$y_p(x) = x(a_1x + a_0)\sin(x) + x(b_1x + b_0)\cos(x).$$

(b) Das char. Polynom lautet hier $p(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 - 2\lambda + 20$ wir sehen die Nullstelle zwei und erhalten nach Polynomdivision $p(\lambda) = (\lambda+2)(\lambda^2 - 6\lambda + 10)$ und damit die Nullstellen $-2, 3 \pm i$. Es liegt also keine Resonanz vor und der Ansatz lautet:

$$y_p(x) = (a_2x^2 + a_1x + a_0)e^x.$$

(c) Wir haben $p(\lambda) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 12\lambda + 8 = (\lambda+2)^3$. Wir haben hier eine Resonanz durch die Nullstelle -2 mit Vielfachheit 3. Also lautet der Ansatz

$$y_p(x) = x^3(a_1x + a_0)e^{-2x}.$$

(d) Hier ist $p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - 6\lambda = \lambda(\lambda+3)(\lambda-2)$ mit den Nullstellen $0, -3, 2$. In beiden Summanden liegt eine Resonanz vor deshalb benutzen wir hier

$$y_p(x) = x(a_1x + a_0)e^{2x} + x(b_0)e^{-3x}.$$

(e) Das charakteristische Polynom lautet $p(\lambda) = \lambda^4 + 4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda + 5$ und durch den Hinweis sehen wir, dass womöglich $\pm i$ Nullstellen sind (Eulersche Formel), wir also $x^2 + 1$ herausdividieren können: Tatsächlich erhalten wir $p(\lambda) = (\lambda^2+1)(\lambda^2 + 4\lambda + 5)$ und damit die Nullstellen $\pm i, -2 \pm i$. Wegen den Nullstellen $\pm i$ haben wir eine Resonanz und damit lautet der Ansatz

$$y_p(x) = x(a_0 \sin(x)) + x(b_0\cos(x)).$$

(f) An dieser Lösung der homogenen Gleichung erkennen wir, dass wahrscheinlich $-1 \pm i$ sogar doppelte Nullstellen sind, also $(\lambda^2+2\lambda+2)^2$ aus dem charakteristischen Polynom $p(\lambda) = \lambda^5+\lambda^4-4\lambda^3-15\lambda^2-20\lambda-12$ herausdividiert werden kann: Tatsächlich erhalten wir

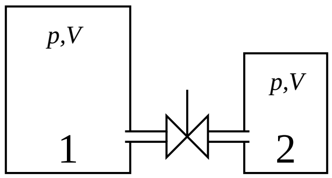
$$p(\lambda) = (\lambda^2 + 2\lambda + 2)^2(\lambda - 3)$$

und damit die Nullstellen $-1 \pm i, 3$. Es liegt hier also keine Resonanz vor und der Ansatz ist:

$$y_p(x) = a_0 e^{-3x}$$

Aufgabe 40: *Zwei Druckluftbehälter mit unterschiedlichen Volumina V_1 und V_2 sind durch eine zunächst verschlossene Rohrleitung verbunden. Vor Öffnen des Sperrventils zu $t = 0$ herrschen in den Behältern unterschiedliche Druckpegel $p_1(0)$ und $p_2(0)$ vor. Aus der Zustandsgleichung idealer Gase $pV = nRT$ (n Stoffmenge, R Gaskonstante, T Temperatur) erhalten wir unter Annahme eines isothermen Ausgleichs den Zusammenhang $\dot{p}V = \dot{n}RT$ und letztlich mit dem Strömungswiderstand W der Rohrleitung, $\dot{n} = Wp$ und $a_{1,2} := \frac{RT}{WV_{1,2}}$ das folgende System für das Modell*

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_1(t) \\ \dot{p}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 & a_1 \\ a_2 & -a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{pmatrix}, \quad t > 0.$$



Es sei $p_1(0) = 1$ bar, $p_2(0) = 9$ bar, $a_1 = 1$ bar/s und $a_2 = 3$ bar/s.

(a) Welcher Behälter erreicht einen Druck von zwei Bar und nach welcher Zeit?

(b) Welcher Druck wird nach vollständigem Druckausgleich erreicht werden?

Lösung 40: Das zu lösende Anfangswertproblem lautet (einheitenlos)

$$\dot{p}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}}_{=A} p(t)\,, \ t > 0\,, \quad p(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Zunächst wird das charakteristische Polynom bestimmt:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 3 & -3-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)(-3-\lambda) - 3 = \lambda(\lambda + 4)$$

Die Eigenwerte sind damit $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = -4$. Einen Eigenvektor des ersten Eigenwerts erhalten wir aus dem Gleichungssystem $Ax = 0$, z.B. $x^{(1)} = (1,1)^\top$, zum zweiten Eigenwert betrachten wir das Gleichungssystem $(A+4I)x = 0$, dies führt zu $x^{(2)} = (-1,3)^\top$. Die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystem ist somit

$$p(t) = C_1 x^{(1)} e^{\lambda_1 t} + C_2 x^{(2)} e^{\lambda_2 t} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-4t}, \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Aus den angegebenen Anfangswerte $p(0) = (1,9)^\top$ erhalten wir $C_1 = 3$ und $C_2 = 2$ und die Lösung des Modells

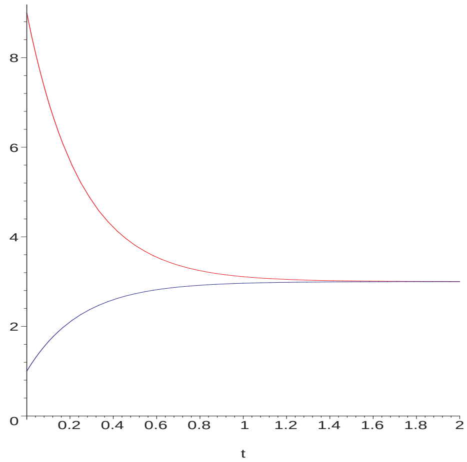
$$p(t) = \begin{pmatrix} 3 - 2e^{-4t} \\ 3 + 6e^{-4t} \end{pmatrix}.$$

(a) Für den Druck im ersten Behälter hat die Gleichung $p_1(t) = 3 - 2e^{-4t} \stackrel{!}{=} 2$ die Lösung $t = \frac{1}{4}\ln 2 \approx 0.17$ s, für den zweiten Behälter gilt $p_2(t) = 3 + 6e^{-4t} > 3$, und daher wird er nie den geforderten Druck erreichen.

(b) Den Druckausgleich erhalten wir für $t \to \infty$, dann gilt

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = \begin{pmatrix} \lim\limits_{t\to\infty} 3 - 2e^{-4t} \\ \lim\limits_{t\to\infty} 3 + 6e^{-4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Somit beträgt der Druck in beiden Behältern 3 bar.



Die Abbildung zeigt den Verlauf des Drucks p_1 (blau) und p_2 (rot) in beiden Behältern.