Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. F. Hettlich
Dr. S. Schmitt
Dipl.-Math. J. Kusch

Karlsruhe, den 09.06.2011

Lösungen zum 9. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik II für biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe 41: Gegeben sei die Differentialgleichung

$$x^2y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = x^3 \ln x, \quad x > 0.$$

Die zugehörige homogene Differentialgleichung besitzt eine Lösung der Form $y(x) = Ax + B$.

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des homogenen Problems durch Reduktion der Ordnung.

(b) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung des inhomogenen Problems mittels Variation der Konstanten.

(c) Lösen Sie das Anfangswertproblem der inhomogenen Differentialgleichung mit $y(1) = y'(1) = 1$.

Lösung 41:

(a) Eine homogene Euler-Differentialgleichung löst man normalerweise mit dem Ansatz $y(x) = x^\lambda$. Ist jedoch schon eine Lösung gegeben, so kann man die zweite Lösung durch die Reduktion bestimmen. Aus dem Ansatz der Aufgabenstellung erhält man $y_1(x) = x$ als Lösung der homogenen Gleichung; Wir wählen den Reduktionsansatz: $y(x) = xu(x)$, damit $y'(x) = u(x) + xu'(x)$ und $y''(x) = 2u'(x) + xu''(x)$. In der DGL eingesetzt haben wir die reduzierte Differentialgleichung:

$$u''(x) = 0$$

Somit ist $u(x) = cx + d,\ c, d$ beliebig. Deswegen lautet $y(x) = xu(x) = cx^2 + dx$, also ist $y_2(x) = x^2$ weitere Lösung der homogenen Gleichung.

An der Wronskideterminante

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = x^2 \neq 0$$

sehen wir, dass wir hier tatsächlich ein Fundamentalsystem haben.

(b) Wir verwenden das Prinzip der Variation der Konstanten mit dem Ansatz

$$y_p(x) = c_1(x)x + c_2(x)x^2 \,.$$

Dies führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} c_1'(x)x + c_2'(x)x^2 &= 0 \\ c_1'(x) + c_2'(x)2x &= x \ln x \end{aligned}$$

mit der Lösung $c_1'(x) = -x \ln x$ und $c_2'(x) = \ln x$. Wir erhalten durch Integration z.B. $c_1(x) == \frac{x^2}{4}(1 - 2\ln x)$ und $c_2(x) = x \ln x - x$. Damit ist $y_p(x) = \frac{x^3}{2} \ln x - \frac{3}{4}x^3$ eine partikuläre Lösung.

(c) Setzen wir die Anfangsbedingung in die allgemeine Lösung $y(x) = C_1x + C_2x^2 + \frac{x^3}{2} \ln x - \frac{3}{4}x^3$ ein, so erhalten wir die eindeutige Lösung $y(x) = \frac{x^3}{4}(2\ln x - 3) + \frac{3}{4}x + x^2$.

Aufgabe 42: Gegeben sei die folgende Differentialgleichung

$$-15u(x) + 3xu'(x) + x^2u''(x) = 8x^{-3}, \qquad x > 0.$$

(a) Geben Sie ein reelles Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung an.

(b) Berechnen Sie eine partikuläre Lösung durch Variation der Konstanten und geben Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung an.

Lösung 42:

(a) Der Ansatz ist $u(x) = x^\lambda$. Das charakteristische Polynom dieser Eulerschen Differentialgleichung ergibt sich zu
$$p(\lambda) = -15 + 3\lambda + \lambda(\lambda - 1) = -15 + 2\lambda + \lambda^2 = (\lambda + 1)^2 - 16 = (\lambda - 3)(\lambda + 5)$$
mit den beiden einfachen Nullstellen $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = -5$. Damit erhalten wir das reelle Fundamentalystem
$$\{x^3, x^{-5}\}.$$

(b) Den Ansatz für die partikuläre Lösung erhalten wir durch Variation der Konstanten aus der Lösung der homogenen Gleichung $u_h(x) = c_1x^3 + c_2x^{-5}$:
$$u_p(x) = c_1(x)x^3 + c_2(x)x^{-5}$$
Durch Ableiten erhalten wir
$$\begin{aligned} u_p'(x) &= \underbrace{c_1'(x)x^3 + c_2'(x)x^{-5}}_{\overset{!}{=}0 \text{ 1. Bedingung}} + 3c_1(x)x^2 - 5c_2(x)x^{-6}, \\ u_p''(x) &= 3c_1'(x)x^2 - 5c_2'(x)x^{-6} + 6c_1(x)x + 30c_2(x)x^{-7}. \end{aligned}$$
Die zweite Bedingung erhalten wir durch Einsetzen der partikulären Lösung in die Differentialgleichung
$$\begin{aligned} 8x^{-3} &\overset{!}{=} -15u_p(x) + 3xu_p'(x) + x^2u_p^{(2)}(x) \\ &= -15c_1(x)x^3 - 15c_2(x)x^{-5} + 9x^3c_1(x) - 15x^{-5}c_2(x) \\ &\quad + 3c_1'(x)x^4 - 5c_2'(x)x^{-4} + 6x^3c_1(x) + 30x^{-5}c_2(x) \\ &= 3c_1'(x)x^4 - 5c_2'(x)x^{-4}. \end{aligned}$$
Damit ergibt sich folgendes System für $c_1'(x)$ und $c_2'(x)$
$$\begin{aligned} c_1'(x)x^3 + c_2'(x)x^{-5} &= 0 \\ 3c_1'(x)x^4 - 5c_2'(x)x^{-4} &= 8x^{-3}. \end{aligned}$$
Einsetzen der ersten Bedingung in die Zweite liefert $c_2'(x) = -x$ und damit $c_2(x) = -x^2/2 + E$. Das ergibt $c_1'(x) = x^{-7}$ und damit $c_1(x) = -x^{-6}/6 + F$. Setzten der Konstanten E und F gleich 0 liefert eine partikuläre Lösung
$$u_p(x) = -\frac{1}{6}x^{-6}x^3 - \frac{1}{2}x^2x^{-5} = -\frac{1}{6}(x^{-3} + 3x^{-3}) = -\frac{2}{3}x^{-3}$$
und wir erhalten für die allgemeine Lösung:
$$u(x) = u_h(x) + u_p(x) = c_1x^3 + c_2x^{-5} - \frac{2}{3}x^{-3}.$$

Aufgabe 43: Bestimmen Sie mit einem Potenzreihenansatz die Lösung des folgenden Anfangswertproblems für die Tschebyscheffsche Differentialgleichung mit Index $n \in \mathbb{N}_0$:
$$(1 - x^2)u''(x) - xu'(x) + n^2u(x) = 0, \quad x \in (-1, 1), \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = 0.$$
Zeigen Sie, dass

(a) alle Koeffizienten ungerader Potenzen verschwinden,

(b) die Reihe im Falle gerader n nach dem Glied mit x^n abbricht und

(c) die Lösung im Falle ungerader n den Konvergenzradius 1 besitzt.

Lösung 43: Wie immer setzen wir an:
$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_kx^k, \; u'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_kkx^{k-1}, \; u''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} c_kk(k-1)x^{k-2}.$$

Dies setzen wir in die Differentialgleichung ein:

$$\begin{aligned} (1-x^2)\sum_{k=2}^{\infty} c_k(k)(k-1)x^{k-2} - x\sum_{k=1}^{\infty} c_k k x^{k-1} + n^2\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k &\stackrel{!}{=} 0 \\ \sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1)x^{k-2} - \sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1)x^k - \sum_{k=1}^{\infty} c_k k x^k + n^2\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k &\stackrel{!}{=} 0 \\ \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+2}(k+2)(k+1)x^k - \sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1)x^k - \sum_{k=1}^{\infty} c_k k x^k + n^2\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k &\stackrel{!}{=} 0 \\ \sum_{k=2}^{\infty}\{c_{k+2}(k+2)(k+1) - c_k k(k-1) - c_k k + n^2 c_k\}x^k + 2c_2 + 6c_3 x - c_1 x + n^2 c_0 + n^2 c_1 x &\stackrel{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Da rechts die Nullreihe steht, müssen die Vorfaktoren aller x-Potenzen gleich Null sein. Für $k=0$ lesen wir aus den hinteren Termen ab: $2c_2 + n^2 c_0 = 0$, d.h. $c_2 = -\frac{n^2}{2}c_0$. Für $k=1$ ergibt sich $(6c_3 - c_1 + n^2 c_1)x = 0$, also $c_3 = \frac{1-n^2}{6}c_1$. Für $k \geq 2$ schließlich erhalten wir aus der Bedingung

$$\{c_{k+2}(k+2)(k+1) - c_k k(k-1) - c_k k + n^2 c_k\} = 0$$

die Rekursionsformel (zunächst eigentlich nur für $k \geq 2$, aber betrachtet man die beiden obigen Beziehungen genauer, so gilt sie schon für $k \geq 0$!!!)

$$c_{k+2} = \frac{k^2 - n^2}{(k+1)(k+2)}c_k, \ k \geq 0, \ c_0 = u(0) = 1, \ c_1 = u'(0) = 0.$$

(a) Da $c_1 = 0$ ist, folgt aus der Rekursionsformel sofort $0 = c_3 = c_5 = ... = c_{2k+1}, \ k \in \mathbb{N}$.

(b) Ist n gerade, so haben wir $c_{n+2} = \frac{n^2-n^2}{(n+1)(n+2)}c_n = 0$, d.h. das $n+2$ Glied ist 0. Gemäß der Rekursionsformel bedeutet dies aber $c_{n+4} = 0, \ c_{n+6} = 0, ...$. Also ist für Gerades n die Potenzreihe einfach ein Polynom!

(c) Wenn n ungerade ist, so ist $c_{2m} \neq 0$ für $m \in \mathbb{N}$. Wir wenden das Quotientenkriterium an:

$$\left|\frac{c_{2m+2}}{c_{2m}}\right| = \left|\frac{\frac{(2m+2)^2-n^2}{(2m+3)(2m+4)}}{\frac{(2m)^2-n^2}{(2m+1)(2m+2)}}\right| \stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Also konvergiert die Reihe absolut und gleichmäßig für $|x| < 1$.

Aufgabe 44:

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y''(x) - 2xy'(x) - 2y(x) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

mit einem Potenzreihenansatz, bestimmen Sie den Konvergenzradius.

Lösung 44: Wir setzen eine Potenzreihe um den Entwicklungspunkt 0 an:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$$

Diesen Ansatz wenden wir auf die Differentialgleichung an und bringen alle Potenzen zum gleichen Exponenten n, damit wir sie zusammenfassen können:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} y'' - 2xy - 2y \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} 2n c_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2n c_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n x^n \\ &= \underbrace{2\cdot 1\cdot c_2 - 2c_0}_{n=0} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)c_{n+2} - (2+2n)c_n\right]x^n \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich führt nun auf

$$\begin{aligned} c_2 &= c_0 \\ c_{n+2} &= \frac{2}{(n+2)}c_n \end{aligned}$$

und mit den Anfangswerten sehen wir, dass es nur gerade Potenzen gibt, die Koeffizienten der ungeraden sind 0:

$$c_0 = 1,\ c_2 = 1,\ c_4 = \frac{2^1}{4},\ c_6 = \frac{2^2}{4 \cdot 6},\ c_8 = \frac{2^3}{4 \cdot 6 \cdot 8}$$

Somit hat c_{2n} den Zähler 2^{n-1}, sowie den Nenner $\frac{1}{2} \cdot 2^n n!$. Also ist unsere Vermutung für die geschlossene Form:

$$c_{2n} = \frac{2^{n-1}}{\frac{1}{2} 2^n n!} = \frac{1}{n!}$$

Dies beweisen wir mit vollständiger Induktion:
$k = 0, 1$: $c_0 = 1$ und $c_2 = 1$ stimmt.
$k \to k+1$: Sei $c_{2k} = \frac{1}{k!}$, wir beweisen nun, dass $c_{2(k+1)} = \frac{1}{(k+1)!}$. Laut Rekursion gilt $c_{2k+2} = \frac{2}{2k+2} c_{2k}$. Setzen wir nun die Induktionsannahme ein, unter Beachtung der korrekten Indices, so erhalten wir $c_{2(k+1)} = \frac{1}{k+1} \cdot \frac{1}{k!} = \frac{1}{(k+1)!}$ und somit ist die Vermutung bewiesen. Insgesamt lautet die Lösung also

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^{2k}\,.$$

Für den Konvergenzradius betrachten wir den Quotienten zweier aufeinander folgender Monome

$$\frac{|c_{2n+2}||x^{2n+2}|}{|c_{2n}||x^{2n}|} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}|x^{2n+2}|}{\frac{1}{n!}|x^{2n}|} = \frac{1}{n+1}|x^2|\,.$$

Der Konvergenzradius ist bestimmt durch $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}|x^2| < 1$. Hier geht aber $\frac{1}{n+1}$ gegen 0, also ist x beliebig und der Konvergenzradius unendlich: Diese Potenzreihe konvergiert auf der ganzen reellen Achse.

Aufgabe 45: Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x^2 y''(x) + x^2 y'(x) - 2y(x) = 0$$

mit dem erweiterten Potenzreihenansatz $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\lambda}$.

Lösung 45: Wir setzen an

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\lambda}, \qquad a_0 \neq 0,$$

also

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+\lambda) x^{k+\lambda-1}, \qquad y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+\lambda)(k+\lambda-1) x^{k+\lambda-2}.$$

Deshalb ist

$$x^2 y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1}(k+\lambda-1) x^{k+\lambda},$$

außerdem

$$x^2 y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+\lambda)(k+\lambda-1) x^{k+\lambda}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung gibt

$$0 = \sum_{k=1}^{\infty} x^{k+\lambda} \left[a_k (k+\lambda)(k+\lambda-1) + a_{k-1}(k+\lambda-1) - 2a_k\right] + a_0 x^{\lambda}(\lambda(\lambda-1) - 2)$$

Jetzt machen wir einen Koeffizientenvergleich: Beim Term für x^{λ} finden wir

$$0 \overset{!}{=} \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda+1)(\lambda-2).$$

Also können wir entweder $\lambda = 2$ oder $\lambda = -1$ wählen. Für $\lambda = -1$ beinhaltet der verallgemeinerte Potenzreihenansatz $y(x) = x^{-1} \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ aber den (nicht mehr verallgemeinerten) Ansatz $y(x) = x^2 \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ für $\lambda = 2$ (setze $a_0 = a_1 = a_2 = 0$, $a_{k-3} = b_k$). Also rechnen wir nur mit $\lambda = -1$ weiter. Koeffizientenvergleich liefert dann

$$0 \overset{!}{=} a_k(k-1)(k-2) + a_{k-1}(k-2) - 2a_k \;\Rightarrow a_k k(k-3) + a_{k-1}(k-2) \overset{!}{=} 0,\ \ k \geq 1.$$

Dies bedeutet für

$$\begin{aligned}
k = 1: &\ -2a_1 - a_0 = 0 \Rightarrow a_1 = -\frac{1}{2}a_0, \\
k = 2: &\ -2a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0, \\
k = 3: &\ a_2 = 0, \\
k > 3: &\ a_k = -\frac{k-2}{k(k-3)}a_{k-1}.
\end{aligned}$$

Der Koeffizient a_3 ist also noch frei wählbar. Durch vollständige Induktion kann man zeigen, dass $a_k = \frac{(-1)^{k+1}(k-2)}{k!}6a_3$, $k \geq 3$: Für $k = 3$ ist die Aussage richtig. Wenn wir annehmen, dass sie für $k-1 \geq 3$ richtig ist, dann ist sie auch für k richtig, denn

$$a_{k-1} \cdot \left(-\frac{k-2}{k(k-3)}\right) = \frac{(-1)^k(k-3)}{(k-1)!}6a_3\left(-\frac{k-2}{k(k-3)}\right) = \frac{(-1)^{k+1}(k-2)}{k!}6a_3$$

und das war genau die angegebene Form für a_k. Insgesamt folgt die folgende Form der allgemeinen Lösung,

$$y(x) = a_0x^{-1} - \frac{1}{2}a_0 + a_3\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(k-2)}{k!}6a_3x^{k-1}.$$

Die Tatsache, dass wir hier zwei Parameter zur freien Wahl haben, zeigt, dass der Lsungsraum der DGL zweidimensional ist (was ja auch so sein muß!). Die allgemeine Lösung der DGL ist also

$$y(x) = A\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) + B\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(k-2)}{k!}x^{k-1},\ A, B \in \mathbb{R}.$$