Der Approximationssatz von Weierstraß

Jan Köster

22. Oktober 2007

1 Einführung

Aus der Analysis wissen wir, dass sich analytische Funktionen durch Potenzreihen der Form $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...$ darstellen lassen. Dabei konvergiert die Potenzreihe innerhalb eines Intervalls $I = [a, b]$ gleichmäßig gegen die Funktion f.
Sei $\sigma_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ eine Teilsumme der Potenzreihe f(x).
Betrachtet man die Folge $(\sigma_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, so gilt im Intervall I:

$$\forall \epsilon > 0 : \exists\ n_0 \in \mathbb{N} : \|f - \sigma_n\|_\infty < \epsilon\ \forall\ n > n_0$$

Es gibt also stets Polynome, die eine analytische Funktion in einem Intervall beliebig genau gleichmä ßig approximieren.

2 Frage

Sei g eine stetige, aber nicht unbedingt analytische Funktion. (Es gibt also nicht unbedingt eine Potenzreihe , die g approximiert.)
Lässt sich g durch Polynome beliebig genau in der ∞-Norm auf einem bestimmten Intervall approximieren?
Sei $P_n := \{p \in C(-\infty, +\infty)|\ p(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_ix^i \text{ mit } a_i \in \mathbb{R},\ 0 \leq i \leq n\}$ der Vektorraum aller Polynome über $\mathbb{R}$ mit Höchstgrad n.

3 Satz von Weierstraß

Sei $f \in C[a, b],\ -\infty < a < b < +\infty$ beliebig, dann gilt:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists\ n \in \mathbb{N} : \exists\ p \in P_n : \|f - p\|_\infty < \epsilon \text{ auf } [a, b].$$

Die stetige Funktion f kann also auf $[a, b]$ durch Polynome beliebig genau approximiert werden.

4 Beweis 1

Da dieser Beweis sehr technisch ist, soll hier nur die Idee vorgestellt werden.
Wir betrachten nur das Intervall $[0, 1]$, da sich jedes andere Intervall $[a, b]$ linear auf $[0, 1]$ transformieren lässt und sich der Beweis somit übertragen lässt.
Wir betrachten die Folge $(B_nf)_{n\in\mathbb{N}}$ der Bernsteinpolynome

$$(B_nf)(x) = \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \underbrace{\binom{n}{i} x^i(1-x)^{n-i}}_{=:q_{ni}(x)} \quad (n = 1, 2, ...), \qquad f \in C(I)$$

Die $(B_nf)(x)$ geben lineare Funktionen exakt wieder, daher liegt nahe, dass sie andere Funktionen beliebig genau approximieren könnten.

Sei $\epsilon > 0$.
Wir zeigen, dass $\|f(x) - (B_n f)(x)\|_\infty < \epsilon$, also die gleichmäßige Konvergenz von $(B_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f.
Es ist:

$$\|f(x) - (B_n f)(x)\|_\infty = \|\sum_{i=0}^{n}[f(x) - f(\frac{i}{n})]q_{ni}(x)\|_\infty \text{ mit } \sum_{i=0}^{n} q_{ni}(x) = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i} = 1$$

f ist gleichmäßig stetig, also existiert nach Definition für $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass $|f(x) - f(\frac{i}{n})| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle x mit $|x - \frac{i}{n}| < \delta$.
Man bildet die Mengen

$$N' := \{i \in \{0, ..., n\}| \left|x - \frac{i}{n}\right| < \delta\}$$
$$N'' := \{i \in \{0, ..., n\}| \left|x - \frac{i}{n}\right| \geq \delta\}$$

Damit ist

$$\left|\sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}\right| \leq \left|\sum_{i\in N'} f\left(\frac{i}{n}\right)\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}\right| + \left|\sum_{i\in N''} f\left(\frac{i}{n}\right)\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}\right|$$

$$\left|\sum_{i\in N'} f\left(\frac{i}{n}\right)\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}\right| < \frac{\epsilon}{2} \text{ wie sich leicht nachrechnen lässt.}$$

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i\in N''} f\left(\frac{i}{n}\right)\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}\right| &\leq \frac{2\max\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|}{\delta^2}\sum_{i=0}^{n} q_{ni}(x)\left(x - \frac{i}{n}\right)^2 \\ &= \frac{2\max\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|}{\delta^2}\sum_{i=0}^{n} q_{ni}(x)\left(\underbrace{1}_{1)}x^2 - 2x\underbrace{\frac{i}{n}}_{2)} + \underbrace{\left(\frac{i}{n}\right)^2}_{3)}\right).\end{aligned}$$

Man betrachtet folgende Anteile:

1) $\sum\limits_{i=0}^{n} q_{ni}(x) = 1$

2) $\sum\limits_{i=0}^{n} q_{ni}(x)\frac{i}{n} = x$

3) $\sum\limits_{i=0}^{n} q_{ni}(x)\left(\frac{i}{n}\right)^2 = x^2 + \frac{x}{n} + (1-x)$

$\Rightarrow \left|\sum\limits_{i=0}^{n} q_{ni}(x)\left(x - \frac{i}{n}\right)^2\right| \leq \frac{1}{4n}$

$\Rightarrow \left|\sum\limits_{i\in N''} f(\frac{n}{i})\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}\right| < \frac{\epsilon}{2}$

$\Rightarrow \left|\sum\limits_{i=0}^{n} f(\frac{n}{i})\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}\right| < \epsilon$ $\square$

Dabei sind die Schritte 1) - 3) entscheidend für die Konvergenz von $B_n f$ gegen f.
Wir definieren $e_1(x) = 1, e_2(x) = x, e_3(x) = x^2$.

5 Festellung

Die Konvergenz von $(B_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f für beliebigies $f \in C(I)$ wird bereits durch die Konvergenz von $B_n e_1$ gegen e_1, $B_n e_2$ gegen e_2 und $B_n e_3$ gegen e_3 bestimmt.

6 Idee

Wir untersuchen eine Folge $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$L_n : C(I) \to C(I),\ f(x) \mapsto L_n f \in P_n$$

und zeigen, dass $(L_n f)$ für $f \in C(I)$ gleichmäßig gegen f konvergiert, wenn $L_n e_j$ gleichmäßig gegen e_j konvergiert, $j = 1, 2, 3$.

7 "Zutaten" für den Beweis

- Monotoner linearer Operator
  Def: $L : C(I) \to C(I)$ heißt monotoner linearer Operator, wenn gilt:
  - $L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g)$ (Linearität)
  - $f \leq g \Rightarrow Lf \leq Lg \Leftrightarrow 0 \leq f \Rightarrow 0 \leq Lf$ (Monotonie)
- Vektorraum $(C(I), \|\cdot\|_\infty)$
- "Testmenge" Q
  Def: Eine Menge $Q := \{f_1, f_2, ..., f_n\},\ Q \subset C(I), e_1 \in span(Q)$, heißt Testmenge, wenn eine Funktion $p \in C(I \times I)$ existiert mit
  - $p(t, x) = \sum_{i=1}^{k} a_i f_i(x), a_i \in C(I), 1 \leq i \leq k$
  - $p(t, x) \geq 0 \forall (t, x) \in I \times I$
  - $p(t, t) = 0\ \forall t \in I$
- Nullstellenmenge $Z(g)$
  Def: Sei $g \in C(I \times I)$,
  $Z(g) := \{(t, x) \in I \times I \mid g(t, x) = 0\}$
- Differenzfunktion d_f
  Def: Sei $f \in C(I)$
  Dann: $d_f(t, x) := f(x) - f(t)$

Nun können wir unsere Feststellung auch als Satz formulieren.

8 Satz

Es sei $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}, L_n : C(I) \to C(I)$ eine Folge monotoner linearer Operatoren und Q eine Testmenge mit einem passenden Polynom p.

Für alle Funktionen $f \in Q$ gelte: $\lim\limits_{n\to\infty} \|L_n f - f\|_\infty = 0$.
Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n f - f\|_\infty = 0 \text{ für alle Funktionen} f \in C(I) \text{ mit } Z(p) \subset Z(d_f)$$

In Anwendung dieses Satztes lässt sich der Satz von Weierstraß beweisen.

9 Beweis 2 des Satzes von Weierstraß

Wir betrachten erneut die Bernsteinpolynome:

$$(B_n f)(x) = \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}, \qquad f \in C(I).$$

Fassen wir $(B_n f)$ als lineare Abbildung auf:

$$B_n : C[0,1] \to P_n$$

B_n ist ein monotoner linearer Operator, denn:

- $B_n(\alpha f + \beta g) = \alpha B_n(f) + \beta B_n(g)$ (nachrechnen) $\Rightarrow$ Linearität
- Sei $f \geq 0 \Rightarrow \sum\limits_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\binom{n}{i} x^i(1-x)^{n-i} = \sum\limits_{i=0}^{n} \underbrace{f\binom{n}{i}}_{\geq 0} \underbrace{q_{ni}(x)}_{\geq 0 \text{ auf } [0,1]} \geq 0 \Rightarrow$ Positivität

Wähle Testmenge $Q = \{e_1, e_2, e_3\}$ mit Polynom p

$$\begin{aligned}
p(t,x) &= (t-x)^2 = t^2 - 2tx + x^2 \text{ (erste Vorraussetzung)}\\
p(t,x) &\geq 0 \ \forall (t,x) \in [0,1]\\
p(t,t) &= 0 \ \forall t \in [0,1]
\end{aligned}$$

Also hat $p(t,x)$ nur die Nullstellen $t = x$, also gilt $Z(p) \subset Z(d_f)$ für alle Funktionen $f \in C(I)$.
Aus Beweis 1 wissen wir:

$$\lim_{n\to\infty} \|B_n e_j - e_j\|_\infty = 0,\ j = 1,2,3 \overset{\text{Satz 2}}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} \|B_n f - f\|_\infty = 0 \text{ für alle } f \in C(I)$$

Die Bernsteinpolynome $B_n f$ konvergieren also gegen f auf dem Intervall I für $n \to \infty$. $\square$

10 Beweis von Satz 2

Teil 1: $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{t\in I} (L_n d_f(t,\cdot))(t) \ = 0 \overset{!}{\Rightarrow} \lim\limits_{n\to\infty} \|f - L_n f\|_\infty = 0 \ \ \forall f \in C(I)$.

Teil 2: $f \in C(I),\ Z(p) \subset Z(d_f) \overset{!}{\Rightarrow} \lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{t\in I} (L_n d_f(t,\cdot))(t) \ = 0$

<u>Teil 1:</u>

$$\begin{array}{rlcl}
 & d_f(t,s) & = & f(s) - f(t)\\
\Rightarrow & d_f(t,s) & = & f(s) - f(t)e_1(s)\\
\Rightarrow & f(s) & = & d_f(t,s) + f(t)e_1(s)\\
\Rightarrow & f(r) - (L_n f)(r) & = & f(r) - L_n(d_f(t,\cdot) + f(t)e_1(\cdot))(r)\\
 & & = & f(r) - L_n(d_f(t,\cdot))(r) - f(t)(L_n e_1)(r)
\end{array}$$

Setze $r = t$

$$\begin{aligned}|f(t) - (L_n f)(t)| &= |f(t) - L_n(d_f(t,\cdot))(t) - f(t)(L_n e_1)(t)| \\ &\overset{Dreiecksungl.}{\leq} \|f(t) - f(t)(L_n e_1)(t)\|_\infty + \|(L_n d_f(t,\cdot))(t)\|_\infty \\ \leq \|f(t)\|_\infty & \underbrace{\|e_1 - L_n e_1\|_\infty}_{=0} + \max_{t\in I} |(L_n d_f(t,\cdot))(t)| \ .\end{aligned}$$

e_1 liegt nach Definition von Q in $span(Q)$, deshalb folgt $\|e_1 - L_n e_1\|_\infty = 0$.
Also ist $|F(t) - (L_n f)(t) \leq \max_{t\in I} |(L_n d_f(t,\cdot))(t)|$.
Ist $\lim_{n\to\infty} \max_{t\in I} \mid (L_n d_f(t,\cdot))(t)| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|f - L_n f\|_\infty = 0$
(Da beide nicht negativ sein können.)

Teil 2:
d_f hängt stetig von f und x ab ($f \in C(I)$), also gibt es für $\epsilon < 0$ eine offene Umgebung Ω von $Z(d_f)$, sodass, $|d_f(t,x)| = |f(t) - f(x)| < \epsilon$ für alle $(t,x) \in I \times I$.
Die Diagonale $d = \{(t,x) \in I \times I | t = x\}$ liegt auf jeden Fall in $Z(d_f)$. Aus $Z(p) \subset Z(d_f)$ folgt: alle Nullstellen von $p(t,x)$ liegen in Ω, also ist $p(t,x) > 0$ für alle $(t,x)\Omega^c, \Omega^c = I \times I \backslash \Omega$.
Da Ω offen ist, ist ihr Komplement Ω^c abgeschlossen und kompakt, sodass das Minimum
$m := \min_{(t,x)\in\Omega^c} p(t,x)$ existiert.
Daher gilt:

$$|d_f(t,x)| \leq \|d_f\|_\infty \underbrace{\frac{p(t,x)}{m}}_{\geq 1} \text{ für alle } (t,x) \in \Omega^c.$$

Für $(t,x) \in I \times I$ gilt also:

$$|d_f(t,x)| \leq \|d_f\|_\infty \frac{p(t,x)}{m} + \epsilon.$$

Halten wir nun t fest und wenden den *monotonen* linearen Operator L_n auf x an, so ergibt sich:

$$|(L_n d_f(t,\cdot))(t)\| \leq \|d_f\|_\infty \frac{(L_n p(t,\cdot))(t)}{m} + \epsilon(L_n e_1)(t) \leq \|\frac{d_f}{m}\|_\infty \max_{t\in I} |(L_n p(t,\cdot))(t)| + \epsilon \|L_n e_1\|_\infty \ (*).$$

Da für $f \in Q$ $L_n f$ gegen f konvergiert $(n \to \infty)$ und $p(t,t) = 0$ ist, schreiben wir:

$$(L_n p(t,\cdot))(t) = \sum_{i=1}^{k} a_i(t) [\underbrace{(L_n f_i)(t) - f_i(t)}_{\to 0 \ (n\to\infty)}]$$

Aus $L_n f \to f$ $(n \to \infty,\ f \in Q)$ folgt also:

$$\lim_{n\to\infty} \max_{t\in I} (L_n p(t,\cdot))(t)) = 0.$$

Da $\|L_n e_1\|\infty$ beschränkt ist in n, ist wegen $(*)$ auch

$$\lim_{n\to\infty} \max_{t\in I} |(L_n d_f(t,\cdot))(t)| = 0.$$

$\square$