Lösung 1:

$$M_1 \cap M_2 = \{\Delta\},\ M_1 \cup M_3 = \{\Delta, \square, \bigcirc, \nabla\},\ M_2 \setminus M_3 = \{\diamond\}\,.$$

Die Teilmengen von M_1 sind $\emptyset$, $\{\Delta\}$, $\{\square\}$, $\{\bigcirc\}$, $\{\Delta, \square\}$, $\{\Delta, \bigcirc\}$, $\{\square, \bigcirc\}$, und M_1 selbst.

$$\begin{aligned} (M_1 \cap M_2) \cup M_3 &= \{\Delta\} \cup M_3 = \{\Delta, \nabla, \square\}\,, \\ (M_1 \cup M_3) \cap (M_2 \cup M_3) &= \{\Delta, \square, \bigcirc, \nabla\} \cap \{\diamond, \nabla, \square, \Delta\} = \{\Delta, \square, \nabla\}\,. \end{aligned}$$

Lösung 2:

(a) Nach der Definition ist

$$\begin{aligned} A \cup C &= [-4, -1] \cup [-2, 4] = [-4, 4]\,, \\ A \cap B &= [-4, -1] \cap \{-3, -2, 0, 3\} = \{-3, -2\}\,, \\ (A \backslash C) \cup (C \backslash A) &= [-4, -2) \cup (-1, 4]\,. \end{aligned}$$

(b) Allgemein gilt:

$$M = (M \backslash A) \cup (M \cap A)$$

(jedes Element m aus M gehört entweder $M \backslash A$, oder A). Sei D eine beliebige Menge. Aus $M \backslash A \subseteq D$ folgt $M \subseteq A \cup D$ wegen

$$M = (M \backslash A) \cup (M \cap A) \subseteq D \cup A.$$

Andererseits gilt für $M_0 := D \cup A$:

$$M \backslash A = (D \cup A) \backslash A = D \backslash A \subseteq D.$$

Also ist M_0 die gesuchte Maximalmenge. In unserem Fall bedeutet das

$$M_0 = (B \cup C) \cup A = A \cup B \cup C = [-4, 4]\,.$$

Lösung 3:

(a) Formal lässt sich die Aussage A so schreiben:

$$\textit{Aussage } A: \ (n \text{ ungerade}) \ \Rightarrow \ ((1 + a_1)(2 + a_2) \ldots (n + a_n) \text{ gerade})$$

Da $(B \Rightarrow C) \Leftrightarrow (\neg B \vee C)$ können wir die Aussage auch folgendermassen schreiben:

$$\textit{Aussage } A: \ (n \text{ gerade}) \ \vee \ ((1 + a_1)(2 + a_2) \ldots (n + a_n) \text{ gerade})$$

Das logische Gegenteil lautet damit:

$$\textit{Aussage } \neg A: \ (n \text{ ungerade}) \ \wedge \ ((1 + a_1)(2 + a_2) \ldots (n + a_n) \text{ ungerade})$$

(b) Wir zeigen die Aussage A indirekt dadurch, dass wir nachweisen, dass die Aussage $\neg A$ falsch ist. Ist das Produkt

$$(1 + a_1)(2 + a_2) \ldots (n + a_n)$$

ungerade, so ist jeder Faktor ungerade. Diese Wahrheit dieser Aussage erscheint nun zunächst unentscheidbar, da sie womöglich von der Wahl der Anordnung der a_n abhängt. Dem ist aber nicht so:

Ist n ungerade, so sind innerhalb $1, 2, \ldots, n$ die Zahlen $2, 4, \ldots, n-1$ also $\frac{n-1}{2}$ Zahlen gerade, und $1, 3, 5, \ldots, n$ also insgesamt $\frac{n+1}{2}$ Zahlen ungerade.

Da nun eine Summe zweier Zahlen nur genau dann ungerade ist, wenn eine Zahl gerade und die andere ungerade ist, muss die Aussage $\neg A$ falsch sein: Denn wenn n ungerade ist, gibt es in $1, \ldots, n$ und $a_1, \ldots, a_n$ unterschiedlich viele gerade und ungerade Zahlen- unabhängig von der Wahl der Anordnung der Zahlen in $a_1, \ldots, a_n$.

Da $\neg A$ somit falsch ist, können wir folgern, dass die Aussage A korrekt ist.

Lösung 4:

(a) Nachweis von $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \geq \frac{1}{2}$ durch vollständige Induktion:

$n = 1$: Die Aussage $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$ ist korrekt.

$n \to n+1$: Die Aussage $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \geq \frac{1}{2}$ $(*)$ sei korrekt für n. Zu zeigen ist $\sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k+1} \geq \frac{1}{2}$.

Es ist

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k+1} &= \sum_{k=2}^{n+2} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=1}^{n+2} \frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{n+n+1} + \frac{1}{n+n+2} - \frac{1}{n+1} \\
&\overset{(*)}{\geq} \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{2n+1}}_{>\frac{1}{2n+2}} + \frac{1}{2n+2} - \frac{2}{2n+2} \geq \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(b) Nachweis von $\sum\limits_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{n}{2}$ durch vollständige Induktion:

$n = 1$: Die Aussage lautet $\sum\limits_{k=1}^{2} = 1 + \frac{1}{2} \geq 1 + \frac{1}{2}$ und ist somit korrekt.

$n \to n+1$: Die Aussage $\sum\limits_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{n}{2}$ $(*)$ sei korrekt für n. Zu zeigen ist: $\sum\limits_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{n+1}{2}$.

Es ist

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} &\overset{(*)}{\geq} 1 + \frac{n}{2} + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} = 1 + \frac{n}{2} + \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^n + \underbrace{k}_{\leq 2^n}} \\
&\geq 1 + \frac{n}{2} + \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^{n+1}} = 1 + \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n+1}{2}
\end{aligned}$$

Lösung 5:

(a) $(x-5)^3(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow ((x-5)^3 \geq 0,\ x+1 \geq 0)$ oder $((x-5)^3 \leq 0,\ x+1 \leq 0) \Leftrightarrow (x \geq 5,\ x \geq -1)$ oder $(x \leq 5,\ x \leq -1) \Leftrightarrow x \geq 5$ oder $x \leq -1 \Leftrightarrow\ x \in \mathbb{R}\backslash(-1,5)$

(b) Nenner liefert Bedingung $x \neq -5$. Nenner > 0, daher reicht $(x+1)(3-x) \leq 0$. Also $(x+1 \leq 0,\ 3-x \geq 0)$ oder $(x+1 \geq 0,\ 3-x \leq 0) \Leftrightarrow (x \leq -1,\ x \leq 3)$ oder $(x \geq -1,\ x \geq 3) \Leftrightarrow x \leq -1$ oder $x \geq 3$.
Damit ist $x \in \mathbb{R}\backslash\big((-1,3) \cup \{5\}\big)$.

(c) Wir behandeln den Term $|x|$ in den zwei folgenden Fällen:

Fall $x \geq 0$: $|x| = x^3 + 2x^2 - 3x \Leftrightarrow 0 = x^3 + 2x^2 - 4x = x(x^2 + 2x - 4) = x((x+1)^2 - 5) \Leftrightarrow x = 0$ oder $(x+1)^2 = 5 \Leftrightarrow x = 0$ oder $|x+1| = \sqrt{5} \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = -1 + \sqrt{5}$ oder $x = -1 - \sqrt{5}$.
Wegen $x \geq 0$ also $x = 0$ oder $x = -1 + \sqrt{5}$.

Fall $x < 0$: $|x| = x^3 + 2x^2 - 3x \Leftrightarrow 0 = x^3 + 2x^2 - 2x = x(x^2 + 2x - 2) = x((x+1)^2 - 3) \Leftrightarrow x = 0$ oder $(x+1)^2 = 3 \Leftrightarrow x = 0$ oder $|x+1| = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = -1 + \sqrt{3}$ oder $x = -1 - \sqrt{3}$.
Wegen $x < 0$ also $x = -1 - \sqrt{3}$.

Folglich ist $x \in \{0, -1 + \sqrt{5}, -1 - \sqrt{3}\}$.