Mathematisches Institut II
Universität Karlsruhe (TH)
PD Dr. Frank Hettlich
Dr. T. Arens
Dipl.-Math. techn. S. Ritterbusch

51	52	53	54	55	$\sum$

Karlsruhe, den 23.1.2006

Matrikel-Nr.: ....

Matrikel-Nr.: ....

Gruppen-Nr.: ......

11. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik I für biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe 51: Berechnen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der kubischen Gleichung

$$z^3 - 3iz^2 - 3z - (1 + (\sqrt{3} - 1)i) = 0.$$

Hinweis: Binomische Formel.

Aufgabe 52: Berechnen Sie die Ableitung der Funktionen

$$\text{(a) } x \mapsto \sin(x^2)\sin^2 x, \qquad \text{(b) } x \mapsto \ln\left(\frac{1-e^x}{e^x}\right), \qquad \text{(c) } x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Aufgabe 53: Sei $a > 0$ eine Konstante. Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen auf $\mathbb{R}_{>0}$:

$$\text{(a) } x \mapsto x^x, \qquad \text{(b) } x \mapsto a^{(x^x)}, \qquad \text{(c) } x \mapsto x^{(a^x)}, \qquad \text{(d) } x \mapsto x^{(x^a)}.$$

Aufgabe 54: Gegeben seien die Potenzreihen

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!}, \qquad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k.$$

(a) Bestimmen Sie die Bereiche, in denen Sie durch Ableiten der Potenzreihen die Ableitungen der Funktionen bestimmen können und berechnen Sie diese.

(b) Finden Sie Polynome p und q, welche die Eigenschaften

$$p(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}, \qquad q(x) = \frac{g(x)}{g'(x)}$$

für alle x erfüllen, für die die Potenzreihen konvergieren.

Aufgabe 55: Bestimmen Sie zu

$$f(x) = x\cosh\left(\frac{x^3}{6}\right)$$

die Werte der 12. und 13. Ableitung an $x = 0$, in dem Sie die Potenzreihe der Funktion betrachten.

Abgabetermin: Montag, den 30.1.2006, 11:00 Uhr, in den Fächern bei Zimmer 208.1 im Mathematikgebäude.

11. Tutorium
zur Vorlesung Höhere Mathematik I für
biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe T41: Für $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$ wird die Potenz a^x definiert durch $a^x := e^{x \cdot \ln a}$. Zeigen Sie:

(a) Für $a, b > 0$ gilt $(a^x)^y = a^{xy}$.

(b) Für $a > 1$ ist a^x streng monoton wachsend, für $0 < a < 1$ streng monoton fallend.

Für $a = 10$ nennt man die Umkehrfunktion von $f(x) = 10^x$ den *Zehner-Logarithmus* $\log_{10} x$.

(c) Wie lässt sich unter Verwendung der Funktion $\ln x$ der Wert $\log_{10} x$ berechnen?

(d) Zeigen Sie:
$$\begin{array}{lcll} \log_{10}(xy) & = & \log_{10} x + \log_{10} y & , \quad x, y > 0 \ , \\ \log_{10}(x^y) & = & y \log_{10} x & , \quad x > 0, \ y \in \mathbb{R} \ . \end{array}$$

Aufgabe T42: Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden differenzierbaren Funktionen:

(a) $f_1(x) = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

(b) $f_2(x) = (\sqrt{x} + 1)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)$ für $x \in \mathbb{R}_{>0}$,

(c) $f_3(x) = \dfrac{\sin x}{\sin x + \cos x}$ für $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

(d) $f_4(x) = e^{(\sin x)^2} + e^{\sin x^2} + \left(e^{\sin x}\right)^2$ für $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe T43: Die Umkehrfunktion des Tangens ist die Funktion
$$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

(a) Berechnen Sie die Ableitung von arctan mit der Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion.

(b) Für $|x| < 1$ kann arctan in eine Potenzreihe entwickelt werden:
$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$
Berechnen Sie $(\arctan x)'$ nun, indem Sie diese Potenzreihe differenzieren.

Aufgabe T44: Gegeben sei die Funktion
$$f(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right), \qquad x > 1.$$

(a) Berechnen Sie die Ableitung von f.

(b) Für f gilt auch die Reihendarstellung
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)\, x^{2k+1}}.$$
Benutzen Sie diese Darstellung, um die Ableitung von f zu berechnen.

Tutorien: Dienstag, den 24.1.2006, bis Donnerstag, den 26.1.2006.