Mathematisches Institut II
Universität Karlsruhe (TH)
PD Dr. Frank Hettlich
Dr. T. Arens
Dipl.-Math. techn. S. Ritterbusch

56	57	58	59	60	$\sum$

Karlsruhe, den 30.1.2006

Matrikel-Nr.: ....

Matrikel-Nr.: ....

Gruppen-Nr.: ......

12. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik I für biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe 56: Zeigen Sie für $x \in [-1, 1]$

$$-1 + x - \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \leq \arctan(x) \leq 1 + x + \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\,.$$

Hinweis: Untersuchen Sie Extrema der Differenzen der Terme.

Aufgabe 57: Bestimmen Sie auf $x \in [0, 2]$ den Wertebereich von

$$f(x) = \ln(x + 1) - \frac{x^2}{2 + 2x}\,.$$

Aufgabe 58: Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\text{(a)} \quad \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^3 + ax^2 + x} - \frac{1}{\sin x} \right), \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\tan x}, \qquad \text{(c)} \quad \lim_{x \to 0} (\cos x)^{1/x^2}.$$

Die Zahl $a \in \mathbb{R}$ aus Teil (a) ist ein fester Parameter.

Aufgabe 59: Berechnen Sie alle Ableitungen $f^{(n)}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ der Funktion

$$f : \begin{cases} (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln \dfrac{1 + x}{1 - x} \end{cases}$$

und geben Sie damit die Taylorreihe für f an mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert diese Reihe?

Aufgabe 60: Zeigen Sie für natürliche Zahlen n und $1 + x > 0$ mittels der Taylorformel, dass gilt

$$\text{(a)} \quad (1 + x)^n \geq 1 + nx, \qquad \text{(b)} \quad (1 + x)^{\frac{1}{n}} \leq 1 + \frac{x}{n}.$$

Abgabetermin: Montag, den 6.2.2006, 11:00 Uhr, in den Fächern bei Zimmer 208.1 im Mathematikgebäude.

12. Tutorium
zur Vorlesung Höhere Mathematik I für
biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe T45: Zeigen Sie für $x \in [-1, 1]$ die Ungleichung

$$\arcsin(x) \leq \frac{\pi}{2} + 2x\sqrt{1 - x^2}\,.$$

Aufgabe T46:

(a) Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

$$\text{(i)} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{x^2\, e^x}{(e^x - 1)^2}, \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{\sin(x^2)}.$$

(b) Bestimmen Sie die Konstante $c \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} c, & x = 1, \\ \frac{2^{\ln x} - x}{\ln x}, & x \neq 1, \end{cases}$$

auf $\mathbb{R}_{>0}$ stetig ist.

Aufgabe T47: Berechnen Sie das Taylor-Polynom vom Grad $n = 5$ zu $f(x) = \sin^2 x$. Approximieren Sie damit $\sin^2 \frac{1}{10}$ und zeigen Sie, daß der Fehler kleiner als 10^{-6} ist.

Aufgabe T48: Verwenden Sie die Taylor-Formel zweiter Ordnung mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und dem Lagrangeschen Restglied um die Einschließung

$$x - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 \leq \ln(1 + x) \leq x - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x^3, \qquad 0 \leq x < \infty,$$

zu beweisen.

Tutorien: Dienstag, den 31.1.2006, bis Donnerstag, den 2.2.2006.