Mathematisches Institut II
Universität Karlsruhe (TH)
PD Dr. F. Hettlich
Dr. T. Arens
Dipl.-Math. techn. S. Ritterbusch

6	7	8	9	10	$\sum$

Karlsruhe, den 7.11.2005

Matrikel-Nr.: ....

Matrikel-Nr.: ....

Gruppen-Nr.: ......

2. Übungsblatt
zur Vorlesung Höhere Mathematik I für
biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe 6: Man zeige durch vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N}$:

$$\text{(a)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \geq \frac{1}{2}, \qquad \text{(b)} \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{n}{2}.$$

Aufgabe 7: Gegeben seien die komplexen Zahlen

$$z_1 = 1 + i, \qquad z_2 = 2 - 3i \qquad z_3 = \sqrt{3} + i.$$

Berechnen Sie

(a) Real- und Imaginärteil der komplexen Zahlen $\overline{z_j}$, $-z_j$, $z_j\overline{z_j}$, $\frac{1}{z_j}$, $z_j - \overline{z_j}$ und $|z_j|$, jeweils für $j = 1, 2$, sowie der Zahlen

$$\frac{z_1}{z_1 + z_2}, \qquad \text{und} \qquad z_1^3 z_2^2.$$

(b) die Polarkoordinatendarstellung (r, φ) von z_3.

Aufgabe 8: Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil aller $\omega \in \mathbb{C}$, welche der Beziehung

$$\omega^2 = \frac{3}{1 - 3i} - \frac{1}{3 + i}$$

genügen,

(a) mit Hilfe des Ansatzes $\omega = x + iy$,

(b) mit Hilfe von Polarkoordinaten.

Aufgabe 9: Gegeben seien die folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$:

$$M_1 := \left\{ \frac{t^2 + 3 + i\,2t}{t^2 + 1} : t \in \mathbb{R} \right\}, \qquad M_2 := \{3 + i\,s : s \in \mathbb{R}\}.$$

Zeigen Sie:

$$\text{(a)} \quad |z - 2| = 1 \text{ für alle } z \in M_1, \qquad \text{(b)} \quad M_2 = \left\{ \frac{2z}{z - 1} : z \in M_1 \right\}.$$

Ohne Beweis: Welche geometrischen Objekte in der komplexen Zahlenebene stellen M_1 und M_2 dar?

Aufgabe 10: Zeigen Sie mit vollständiger Induktion für $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$:

$$\sum_{k=0}^{2n} i^k k = \begin{cases} n(1 - i), & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ -(n+1) + ni, & \text{wenn } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Abgabetermin: Montag, den 14.11.2005, 11:00 Uhr, in den Fächern bei Zimmer 208.1 im Mathematikgebäude.

2. Tutorium
zur Vorlesung Höhere Mathematik I für
biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe T5: Berechnen Sie für folgende komplexe Zahlen c jeweils $-c$, $\overline{c}$, $-\overline{c}$, $c+\overline{c}$, $c-\overline{c}$, $|c|$ und $\operatorname{Arg} c$:

(a) $c_1 = 1+i$, (b) $c_2 = 4-3i$, (c) $c_3 = -5+12i$.

Aufgabe T6: Gegeben seien $z_1 = 1+i, z_2 = 1-i, z_3 = 4-3i$. Berechnen Sie

$$\frac{z_1}{z_2}\ , \quad z_1 \cdot z_3\ , \quad z_1 - z_2\ , \quad \frac{z_3}{z_1}\ , \quad \frac{z_2}{z_1}\ , \quad \frac{z_1 \cdot z_2}{z_3}\ , \quad \frac{z_3}{z_1+z_2}\ , \quad \frac{z_3}{z_1-z_2}\quad .$$

Aufgabe T7: Welche komplexe Zahlen erfüllen die Bedingung

(a) $(\operatorname{Im}(2z+i))^2 - 1 \leq 4|z|^2 - 8\operatorname{Re}(z) < -(z-\overline{z})^2$,

(b) $z^4 + (2i+2)z^2 + 4i = 0$?

Skizzieren Sie für Teil (a) auch die Lösungsmenge in der komplexen Zahlenebene.

Aufgabe T8: Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ gilt

$$\sum_{j=1}^{n} \left[\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi j}{n}\right) \right] = 0.$$

Veranschaulichen Sie diese Aussage geometrisch am Fall $n = 3$!

Hinweis: Zeigen Sie zunächst mit vollständiger Induktion: für $j \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cos(\alpha j) + i \sin(\alpha j) = (\cos\alpha + i \sin\alpha)^j\ ,$$

und wenden Sie dann die geometrische Summenformel an!

Tutorien: Dienstag, den 8.11.2005, bis Donnerstag, den 10.11.2005.