Mathematisches Institut II
Universität Karlsruhe (TH)
PD Dr. Frank Hettlich
Dr. T. Arens
Dipl.-Math. techn. S. Ritterbusch

| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

Karlsruhe, den 14.11.2005

Matrikel-Nr.: ....................

Matrikel-Nr.: ....................

Gruppen-Nr.: ......

# 3. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik I für biw/ciw/mach/mage/vt

**Aufgabe 11:** Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden linearen Gleichungssysteme:

(a) $$\begin{array}{rrrcr} -3x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 3 \\ -2x_1 & -2x_2 & +x_3 & = & 1 \\ -2x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 2 \end{array}$$

(b) $$\begin{array}{rrrcr} x_1 & +2x_2 & +4x_3 & = & 3 \\ 4x_1 & +7x_2 & +x_3 & = & 2 \\ -2x_1 & -3x_2 & +7x_3 & = & 4 \end{array}$$

(c) $$\begin{array}{rrrcr} -5x_1 & +6x_2 & +5x_3 & = & 1 \\ 5x_1 & -9x_2 & -5x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & +5x_2 & -2x_3 & = & 2 \end{array}$$

(d) $$\begin{array}{rrrcr} 4x_1 & +4x_2 & -5x_3 & = & -1 \\ 4x_1 & -3x_2 & -9x_3 & = & 2 \\ -3x_1 & -6x_2 & +2x_3 & = & 2 \\ -6x_1 & -7x_2 & +7x_3 & = & 2 \end{array}$$

**Aufgabe 12:** Gegeben seien die Ebenen $E_1 : x_1 + x_3 = 3$ und $E_2 : x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$ des $\mathbb{R}^3$ sowie die Gerade $g : x = (1,1,1)^\top + \lambda\,(1,0,-1)^\top$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie die Schnittgerade $h$ der beiden Ebenen.

(b) Welche geometrische Beziehung besteht zwischen $g$ und $h$?

(c) Gibt es eine Ebene, die sowohl $g$ als auch $h$ enthält? Falls ja, geben Sie diese an!

**Aufgabe 13:**

(a) Zeigen Sie, dass die Geraden $g : x = (1,2,5)^\top + t(-1,1,2)^\top$, $t \in \mathbb{R}$, und $h : y = (3,-1,2)^\top + s(1,1,0)^\top$, $s \in \mathbb{R}$, windschief sind, d.h nicht parallel sind und keine gemeinsamen Punkte haben.

(b) Bestimmen Sie die Schar aller Ebenen, die zu $g$ und zu $h$ parallel sind, in Normalform.

**Aufgabe 14:** Gegeben sind die folgenden Vektoren aus dem $\mathbb{R}^3$, $u = (1,2,1)^\top$, $v = (-2,1,3)^\top$ und $w = (4,3,-1)^\top$.

(a) Stellen Sie den Vektor $x = (-3,4,7)^\top$ als Linearkombination von $u$, $v$ und $w$ dar.

(b) Sind $u$, $v$ und $w$ linear unabhängig?

(c) Sei ferner $y = (1,0,1)^\top$. Bildet die Menge $\{u,v,y\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

**Aufgabe 15:** Gegeben seien die Vektoren $a = (1,1,1)^\top$, $b = (1,-3,1)^\top$, $x = (1,-1,2)^\top$ und $y = (1,-2,0)^\top$.

(a) Bestimmen Sie alle Vektoren $u \in \mathbb{R}^3$, so dass sowohl die Menge $\{a,b,u\}$ als auch die Menge $\{x,y,u\}$ linear abhängig ist.

(b) Sei weiterhin $c = (1,-4,-4)^\top$. Welche Dimensionen haben die Unterräume $U = \operatorname{span}\{a,b,c\}$ und $V = \operatorname{span}\{c,x,y\}$? Geben Sie jeweils eine Basis von $U$ und $V$ an.

**Abgabetermin:** Montag, den 21.11.2005, 11:00 Uhr, in den Fächern bei Zimmer 208.1 im Mathematikgebäude.

**3. Tutorium**
**zur Vorlesung Höhere Mathematik I für**
**biw/ciw/mach/mage/vt**

**Aufgabe T9:** Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden linearen Gleichungssysteme:

(a) $$\begin{array}{rrrcr} -6x_1 & -9x_2 & +x_3 & = & -8 \\ -6x_1 & -7x_2 & -x_3 & = & -4 \end{array}$$

(b) $$\begin{array}{rrrcr} 5x_1 & +3x_2 & -2x_3 & = & 2 \\ -2x_1 & -2x_2 & +3x_3 & = & 0 \\ -8x_1 & -2x_2 & -5x_3 & = & -4 \end{array}$$

(c) $$\begin{array}{rrrcr} -3x_1 & +4x_2 & -3x_3 & = & -5 \\ 3x_1 & -2x_2 & +3x_3 & = & 7 \\ -2x_1 & +4x_2 & -2x_3 & = & -1 \end{array}$$

**Aufgabe T10:** Gegeben seien im $\mathbb{R}^3$ die Vektoren $b_1 = (1,0,0)^\top$ , $b_2 = (1,1,0)^\top$ , $b_3 = (1,1,1)^\top$ sowie $c_1 = (3,5,2)^\top$ , $c_2 = (1,1,-1)^\top$ , $c_3 = (1,3,4)^\top$ .

(a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $b_1, b_2, b_3$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden und berechnen Sie die Komponenten des Vektors $(1,3,0)^\top$ bezüglich dieser Basis.

(b) Prüfen Sie nach, ob auch die Vektoren $c_1, c_2, c_3$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

**Aufgabe T11:** Gegeben seien die Ebenen

$$E : x_1 - x_3 = 0 \qquad \text{und} \qquad F : x_1 + 2x_2 + x_3 = 4.$$

(a) Bestimmen Sie die Schnittgerade $g$ von $E$ und $F$.

(b) Für eine weitere Gerade $h$, die nicht in $E$ oder $F$ liegt, gibt es folgende Möglichkeiten:

- sie schneidet sowohl $E$ als auch $F$ in genau einem Punkt,
- sie schneidet eine der beiden Ebenen in einem Punkt, die andere aber gar nicht,
- sie schneidet keine der beiden Ebenen.

Konstruieren Sie für jede dieser Möglichkeiten ein Beispiel und machen Sie sich jeweils die geometrische Lage der Ebenen und der Gerade zu einander klar.

**Aufgabe T12:** Gegeben seien die Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie die folgenden Linearkombinationen der drei Vektoren: $u + w$, $v - 3u$, $2u - v + w$.

(b) Zeigen Sie, dass je zwei der Vektoren linear unabhängig sind.

(c) Sind die drei Vektoren ebenfalls linear unabhängig?

**Tutorien:** Dienstag, den 15.11.2005, bis Donnerstag, den 17.11.2005.