Mathematisches Institut II
Universität Karlsruhe (TH)
PD Dr. Frank Hettlich
Dr. T. Arens
Dipl.-Math. techn. S. Ritterbusch

16	17	18	19	20	$\sum$

Karlsruhe, den 21.11.2005

Matrikel-Nr.: ....

Matrikel-Nr.: ....

Gruppen-Nr.: ......

4. Übungsblatt
zur Vorlesung Höhere Mathematik I für
biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe 16: Für welche $\alpha \in \mathbb{C}$ hat das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrcr} (i\alpha - i)z_1 & +(i\alpha^2 - i)z_2 & -(1+i)z_3 & = & -2-2i \\ (i-1)z_1 & +(i-1)z_2 & -iz_3 & = & -1-i \\ z_1 & +z_2 & -z_3 & = & -1 \end{array}$$

(a) keine Lösung?

(b) eine Gerade im $\mathbb{C}^3$ als Lösung? Bestimmen Sie diese.

Aufgabe 17: Bestimmen Sie alle Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rrrrcr} 3x_1 & & +x_3 & -x_4 & = & 4 \\ -8x_1 & +\alpha x_2 & -(\alpha+2)x_3 & +x_4 & = & -8 \\ -8x_1 & -(2\alpha+6)x_2 & +(2\alpha+5)x_3 & -2x_4 & = & 2\beta \\ -4x_1 & -(2\alpha+2)x_2 & +2\alpha x_3 & +3x_4 & = & -1+\beta \end{array}$$

in Abhängigkeit von den Parametern α, $\beta \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 18: Gegeben seien die Geraden

$$g_1 : x = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \qquad\qquad g_2 : \; y = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mu \in \mathbb{R}.$$

(a) Schneiden sich die Geraden g_1 und g_2? Berechnen Sie entweder den Schnittpunkt oder den Abstand der beiden Geraden.

(b) Bestimmen Sie jeweils die Ebene E_1, die g_1 enthält und zu g_2 senkrecht ist, und die Ebene E_2, die g_2 enthält und zu g_1 senkrecht ist. Unter welchem Winkel schneiden sich die beiden Ebenen?

Aufgabe 19: Gegeben sei die Ebene $E : \; 4x_1 + x_3 + 8 = 0$, der Punkt $P = (2, 1, 1)^\top$ und die Gerade $h : \; x = (4, 3, -2)^\top + \lambda(3, 1, -1)^\top$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie eine Gerade durch den Punkt P, die senkrecht auf E steht.

(b) Bestimmen Sie den Abstand von P zu E und den Punkt Q auf E, der P am nächsten ist.

(c) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden h mit E und den Punkt R auf h, der von P den geringsten Abstand hat.

Aufgabe 20: Seien $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)} \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind, d.h. das jeweils aus der einen die andere folgt:

- Die Vektoren $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ und $x^{(3)}$ haben die Länge 1 und sind paarweise orthogonal.
- Für jeden Vektor $x \in \mathbb{R}^3$ gilt die Darstellung $x = (x \cdot x^{(1)})\, x^{(1)} + (x \cdot x^{(2)})\, x^{(2)} + (x \cdot x^{(3)})\, x^{(3)}$.

Abgabetermin: Montag, den 28.11.2005, 11:00 Uhr, in den Fächern bei Zimmer 208.1 im Mathematikgebäude.

4. Tutorium
zur Vorlesung Höhere Mathematik I für
biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe T13:

(a) Für welche Werte α, $\beta \in \mathbb{R}$ ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & \alpha \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

lösbar?

(b) Geben Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ von $Ax = b$ und die Lösungsmenge $\mathcal{L}_0$ des homogenen Systems $Ax = 0$ an.

Aufgabe T14: Gegeben sind die beiden Vektoren

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^2$ mit einem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$. Wir suchen ein $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so dass $Ax = y$ und $Ay = x$. Für welche α kann man so ein A eindeutig bestimmen? Berechnen Sie die Matrix für diesen Fall.

Aufgabe T15: Berechnen Sie den Abstand der beiden windschiefen Geraden

$$g_1 : x = (1,2,3)^\top + \lambda(1,-1,1)^\top \qquad \text{und} \qquad g_2 : x = (2,2,1)^\top + \mu(0,1,1)^\top$$

und die zugehörigen Lotfußpunkte F_1 und F_2.

Aufgabe T16: Gegeben ist die Gerade

$$g : x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad s \in \mathbb{R},$$

sowie die beiden Punkte $P = (2,0,2)^\top$ und $Q = (0,2,2)^\top$.

(a) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Geraden h, die durch P und Q verläuft.

(b) Bestimmen Sie den Punkt R auf g so, dass die Ebene E_1 durch P, Q und R parallel ist zur Ebene E_2, die durch $2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$ beschrieben ist.

(c) Bestimmen Sie den Punkt S auf g, der zu E_1 und E_2 den gleichen Abstand hat.

Tutorien: Dienstag, den 22.11.2005, bis Donnerstag, den 24.11.2005.