Mathematisches Institut II
Universität Karlsruhe (TH)
PD Dr. Frank Hettlich
Dr. T. Arens
Dipl.-Math. techn. S. Ritterbusch

21	22	23	24	25	$\sum$

Karlsruhe, den 28.11.2005

Matrikel-Nr.: ....

Matrikel-Nr.: ....

Gruppen-Nr.: ......

5. Übungsblatt
zur Vorlesung Höhere Mathematik I für
biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe 21: Die Folge (a_n) sei rekursiv durch einen Startwert $a_1 \in [0,2]$ und die Rekursionsvorschrift $a_{n+1} = \dfrac{a_n\,(a_n^2+3)}{3a_n^2+1}$, $n \in \mathbb{N}$, gegeben. Zeigen Sie

(a) die Gleichung $a_{n+1} - 1 = \dfrac{(a_n-1)^3}{3a_n^2+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

(b) für einen Startwert $a_1 \in (0,1)$ besitzt (a_n) die untere Schranke 0 sowie die obere Schranke 1 und ist monoton wachsend,

(c) für einen Startwert $a_1 \in (1,2]$ besitzt (a_n) die untere Schranke 1 sowie die obere Schranke 2 und ist monoton fallend,

Aufgabe 22: Gegeben sei eine Folge (a_k) durch die rekursive Definition $a_k = a_{k-1} + 2a_{k-2}$ für $k \geq 3$ mit $a_1 = a_2 = 1$.

(a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass die Folge mit geeigneten $p, q \in \mathbb{R}$ auch durch $a_k = \dfrac{p^k - (-1)^k}{q}$ dargestellt werden kann.

(b) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$, falls er existiert.

Aufgabe 23: Gegeben sei die Folge (a_n) mit den Folgengliedern $a_n = \dfrac{n+1}{(n+2)^2}$. Zeigen Sie $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, indem Sie zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ eine Zahl N_0 derart bestimmen, dass gilt:

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \text{für alle} \quad n \geq N_0\ .$$

Geben Sie ein gültiges N_0 an für i) $\varepsilon = \frac{1}{10}$, ii) $\varepsilon = \frac{1}{100}$, iii) $\varepsilon = 10^{-10}$.

Aufgabe 24: Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{n+2} - \dfrac{n+2}{n}\right) \cdot \dfrac{n^2+3}{n+2}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{1}{k}\right) - \sqrt{n^2+6n}\right]$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{17n^6 + 83n^4}$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{34^n + 118^n} \cdot \left[\dfrac{(n+4)^4}{n^3} - n + 1\right] - 1$

Aufgabe 25: Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen:

(a) $a_n = 2 + \dfrac{3}{4i\,n} + \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}i\right)^n$ (b) $b_n = \dfrac{(3i\,n+1)(2n+i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} ik}$

Abgabetermin: Montag, den 5.12.2005, 11:00 Uhr, in den Fächern bei Zimmer 208.1 im Mathematikgebäude.

5. Tutorium
zur Vorlesung Höhere Mathematik I für
biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe T17: Gegeben sei die reelle Folge (a_n) mit den Folgengliedern

$$a_n = \frac{1}{2} + (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Ist die Folge beschränkt? Falls ja, gebe das kleinstmögliche r an mit $|a_n| \leq r$. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe T18: Gegeben sei die Iterationsvorschrift:

$$a_{n+1} = \frac{1}{5}(a_n^2 + 4), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Untersuchen Sie die daraus für die Anfangswerte

$$\text{(a)} \quad a_1 = 2, \qquad\qquad \text{(b)} \quad a_1 = 4$$

entstehende Folge (a_n) auf Beschränktheit und Monotonie. Betrachten Sie hierzu den Ausdruck $a_{n+1} - a_n$.

Aufgabe T19: Bestimme den Grenzwert der Folge (a_n) mit

(a) $a_n = \sqrt{n^2 + n} - n$, (b) $a_n = \sqrt[n]{4 + \frac{n-1}{n+1}}$, (c) $a_n = \frac{n^4 - 2}{n^2 + 4} - \frac{n^3(n^2 - 3)}{n^3 + 1}$.

Aufgabe T20: Berechnen Sie die Grenzwerte der Folgen

(a) $a_n = \left[1 + \left(-\frac{3}{5}\right)^n\right] \cdot \left[\frac{10^n}{n!} - \frac{3n^2 + 1}{(2n+1)^2}\right]$

(b) $b_n = \frac{(1 + \sqrt[n]{5})(n + 5)}{\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt[n]{3}\right)(2n + 3)}$,

(c) $c_n = \sqrt[n]{17 \cdot 2^n + 1}\left(\sqrt{n + 1} - \sqrt{n}\right)$.

Tutorien: Dienstag, den 29.11.2005, bis Donnerstag, den 1.12.2005.