Mathematisches Institut II
Universität Karlsruhe (TH)
PD Dr. Frank Hettlich
Dr. T. Arens
Dipl.-Math. techn. S. Ritterbusch

26	27	28	29	30	$\sum$

Karlsruhe, den 5.12.2005

Matrikel-Nr.: ....

Matrikel-Nr.: ....

Gruppen-Nr.: ......

6. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik I für biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe 26: Die Folge (a_n) sei definiert durch $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{n+1} := \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$. Außerdem sei für $n \in \mathbb{N}$ die Folge (c_n) definiert durch $c_{n+1} := a_{n+1} - a_n$.

(a) Geben Sie c_n explizit an.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_{2n} < a_{2n+1}$.

(c) Zeigen Sie: Die Teilfolge (a_{2n}) wächst monoton; (a_{2n+1}) ist monoton fallend.

(d) Drücken Sie a_n durch $c_1, c_2, \ldots$ aus und zeigen Sie: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3}$.

Aufgabe 27: Eine Folge (x_n) in $\mathbb{R}$ sei rekursiv definiert durch einen Startwert $x_0 \in [-1, 1]$ und die Rekursionsvorschrift

$$x_n = x_{n-1}^3 + x_{n-1}^2 - 1, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

(a) Zeigen Sie, $x_n \in [-1, 1]$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge (x_n) monoton fällt.

(c) Für welche Startwerte $x_0 \in [-1, 1]$ konvergiert die Folge? Berechnen Sie jeweils den Grenzwert.

Aufgabe 28: Gegeben sei die komplexe Zahlenfolge (c_n), die rekursiv definiert ist durch

$$c_1 = 1 + 2i \qquad \text{und} \qquad c_{n+1} = \frac{2\mathrm{Re}(c_n)\mathrm{Im}(c_n)}{\mathrm{Re}(c_n) + \mathrm{Im}(c_n)} + i\sqrt{\mathrm{Re}(c_n)\mathrm{Im}(c_n)}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Re}(c_1) \leq \mathrm{Re}(c_2) \leq \ldots \leq \mathrm{Re}(c_n) \leq \mathrm{Im}(c_n) \leq \ldots \leq \mathrm{Im}(c_2) \leq \mathrm{Im}(c_1)$.

(b) Zeigen Sie, dass (c_n) konvergiert und für den Grenzwert c die Aussage $\mathrm{Re}(c) = \mathrm{Im}(c)$ gilt. *Beachten Sie:* Die Berechnung des Grenzwertes ist nicht erforderlich!

Aufgabe 29: Untersuchen Sie die Folgen, deren Glieder unten für $n \in \mathbb{N}$ angegeben sind, auf Beschränktheit, Monotonie und Konvergenz bzw. Beschränktheit, Monotonie und Konvergenz geeigneter Teilfolgen. Der Grenzwert oder die Häufungspunkte müssen nicht angegeben werden.

(a) $a_n = \dfrac{1 + 6n + 2n^2}{(n+3)n}$,

(b) $b_n = 6 - \dfrac{6 + n^2}{n}$,

(c) $c_n = \dfrac{(-2)^{-n} + 1}{1 + 2n} - 1 + \dfrac{2n}{1 + 2n}$,

(d) $d_n = \dfrac{1 + 2^n}{1 + 2^n + (-2)^n}$.

Aufgabe 30: Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folgen mit den Folgengliedern

(a) $a_n = \sqrt[n]{2} + \cos(n\pi)$, (b) $b_n = (1 - i)\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} i^j$,

und geben Sie jeweils eine Teilfolge an, die gegen diese Häufungspunkte konvergiert.

Abgabetermin: Montag, den 12.12.2005, 11:00 Uhr, in den Fächern bei Zimmer 208.1 im Mathematikgebäude.

6. Tutorium
zur Vorlesung Höhere Mathematik I für
biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe T21: Welche der folgenden Aussagen sind zutreffend?

(a) Eine Folge konvergiert, wenn sie monoton und beschränkt ist.

(b) Wenn eine Folge konvergiert, ist sie monoton und beschränkt.

(c) Wenn eine Folge nicht beschränkt ist, kann sie nicht konvergieren.

(d) Wenn eine Folge nicht monoton ist, kann sie nicht konvergieren.

(e) Wenn eine Folge genau einen Häufungspunkt hat, konvergiert sie.

(f) Wenn eine Folge konvergiert, hat sie genau einen Häufungspunkt.

Aufgabe T22: Die Folge (a_n) sei rekursiv definiert durch den Startwert a_0 und die Iterationsvorschrift

$$a_{n+1} = \frac{1}{2 - a_n}, \qquad n > 0.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Folge für $a_0 < 1$ wohldefiniert ist sowie konvergiert, und berechnen Sie ihren Grenzwert.

(b) Was ergibt sich für $a_0 = 1$, $a_0 = \frac{5}{4}$ bzw. $a_0 = \frac{100}{99}$?

Aufgabe T23: Gegeben sei eine rekursiv definierte Folge durch die Vorschrift

$$a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4}, \qquad n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Folge für $0 \leq a_0 \leq \frac{1}{2}$ konvergiert und berechnen Sie ihren Grenzwert.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge für $a_0 > \frac{1}{2}$ divergiert sie (Hinweis: Zeigen Sie $a_n \geq a_0 + nd$ mit $d = (a_0 - 1/2)^2$).

(c) Was passiert für $a_0 < 0$?

Aufgabe T24: Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folgen mit den Gliedern

$$a_n = 3 + (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \quad \text{und} \quad b_n = 2^{n(-1)^n}.$$

Tutorien: Dienstag, zum Nikolaus, bis Donnerstag, den 8.12.2005.