Mathematisches Institut II
Universität Karlsruhe (TH)
PD Dr. Frank Hettlich
Dr. T. Arens
Dipl.-Math. techn. S. Ritterbusch

| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

Karlsruhe, den 12.12.2005

Matrikel-Nr.: ....................

Matrikel-Nr.: ....................

Gruppen-Nr.: ......

# 7. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik I für biw/ciw/mach/mage/vt

**Aufgabe 31:** Gegeben sei die rekursiv definierte Folge

$$a_1 = b \qquad a_{k+1} = \frac{|a_k|}{2a_k - 1}$$

und wir betrachten die zwei Startwerte $b = -\frac{1}{4}$, sowie $b = \frac{1}{4}$.

(a) Gegen welche Grenzwerte kann die Folge konvergieren?

(b) Für welche der beiden Werte für $b$ ist die Folge monoton, für welche ist sie beschränkt?

(c) Begründen Sie jeweils, ob die Folge konvergiert und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert.

**Aufgabe 32:** Gegeben sei das Polynom $p(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6$.

(a) Bestimmen Sie Zahlen $a_0, \ldots, a_4 \in \mathbb{R}$ mit $p(x) = \sum\limits_{j=0}^{4} a_j\,(x-1)^j$.

(b) Zerlegen Sie $p$ in Linearfaktoren, und bestimmen Sie alle Nullstellen von $p$.

**Aufgabe 33:** Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 2x - x^2, & x \leq 1, \\ 9 - 6x + x^2, & x > 1. \end{cases}$$

Bestimmen Sie möglichst große Intervalle, auf denen die Funktion umkehrbar ist. Geben Sie jeweils die Umkehrfunktion an und skizzieren Sie sie.

**Aufgabe 34:** Untersuchen Sie, in welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ die folgenden Funktionen $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig sind:

(a) $$f_1(x) := \begin{cases} \dfrac{x^3 + 4x^2 + x - 6}{x^3 - 3x + 2}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\} \\ 0, & x = 1, \\ -\dfrac{1}{3}, & x = -2, \end{cases}$$

(b) $$f_2(x) := \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

**Aufgabe 35:** Auf $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ sei die Funktion $f$ durch

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{12x - 9}{x^2 - 2x} & 1 < |x| < 3,\ x \neq 2 \\ p(x) & \text{sonst} \end{cases}$$

erklärt, wobei $p$ ein Polynom ist. Das Polynom $p$ soll so bestimmt werden, dass $f$ stetig ist. Machen Sie einen Ansatz für $p$, und begründen Sie, dass dieser Ansatz zu einer eindeutigen Lösung führt. Bestimmen Sie anschließend das Polynom.

**Abgabetermin:** Montag, den 19.12.2005, 11:00 Uhr, in den Fächern bei Zimmer 208.1 im Mathematikgebäude.

## 7. Tutorium
## zur Vorlesung Höhere Mathematik I für
## biw/ciw/mach/mage/vt

**Aufgabe T25:** Gegeben sei das Polynom

$$p(x) = x^4 + 8x^3 + 22x^2 + 24x + 9.$$

Entwickeln Sie $p$ um $x_0 = -2$, d.h. finden Sie eine Darstellung der Form $p(x) = \sum_{j=0}^{4} a_j(x+2)^j$. Zerlegen Sie das Polynom außerdem in Linearfaktoren.

**Aufgabe T26:** Gegeben sei $D \subset \mathbb{R}$ und die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ durch die Abbildungsvorschrift

$$\text{(a) } x \mapsto \frac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 2}, \qquad \text{(b) } x \mapsto \frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 2x + 5}.$$

Geben Sie jeweils den maximalen Definitionsbereich $D$ von $f$ an.

Bestimmen Sie in Teil (a) weiterhin den Wertebereich $W$ von $f$ und stellen Sie fest, ob eine Umkehrfunktion $g : W \to D$ existiert. Geben Sie diese ggf. an.

**Aufgabe T27:** Bestimmen Sie jeweils $\lim_{x \to x_0} f(x)$ für die folgenden Funktionen $f$ und Zahlen $x_0$:

$$\text{(a)} \quad f(x) = \frac{x-2}{x^2-4} \text{ für } x > 2, \quad x_0 = 2, \qquad \text{(b)} \quad f(x) = \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1} \text{ für } x > 1, \quad x_0 = 1.$$

**Aufgabe T28:** Betrachten Sie die stückweise definierte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 12 & x < -1 \\ p(x) & -1 \leq x < 2 \\ 1 - 2x & x \geq 2\,, \end{cases}$$

mit einem Polynom $p$.

(a) Bestimmen Sie ein Polynom $p$ kleinsten Grades, sodass $f$ stetig ist. Ist es eindeutig?

(b) Kann es ein eindeutig bestimmtes Polynom $p$ kleinsten Grades geben, sodass $f$ stetig ist und zusätzlich $f(1) = -2$ gilt? Erklären Sie, warum nicht, oder bestimmen Sie es, falls doch.

**Tutorien:** Dienstag, den 13.12.2005, bis Donnerstag, den 15.12.2005.