Mathematisches Institut II
Universität Karlsruhe (TH)
PD Dr. Frank Hettlich
Dr. T. Arens
Dipl.-Math. techn. S. Ritterbusch

36	37	38	39	40	$\sum$

Karlsruhe, den 19.12.2005

Matrikel-Nr.: ....

Matrikel-Nr.: ....

Gruppen-Nr.: ......

8. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik I für biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe 36: Zeigen Sie, dass das Polynom

$$p(x) = x^5 - 9x^4 - \frac{82}{9}x^3 + 82x^2 + x - 9$$

auf dem Intervall $[-1, 4]$ genau drei Nullstellen besitzt.

Aufgabe 37: Gegeben seien die beiden Funktionen f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & x \leq 2, \\ 4x^2 - 24x + 36, & x > 2, \end{cases} \qquad \text{und} \qquad g(x) = x + 1.$$

Zeigen Sie, dass die Graphen der Funktionen mindestens vier Schnittpunkte haben.

Aufgabe 38: Begründen Sie für die folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$, ob sie offen, abgeschlossen, beschränkt oder kompakt sind.

(a) $A = \{z \in \mathbb{C} : \; 0 < \mathrm{Re}(2 + z + \bar{z} + z\bar{z}) \leq 2\}$

(b) $B = \left\{z \in \mathbb{C} : \; 0 \leq \mathrm{Im}\left((1+i)\bar{z} + \frac{1+z^2\bar{z}^2}{(z-\bar{z})^2-1}\right) \leq 1\right\}$

Aufgabe 39: Für $n \in \mathbb{N}$ seien die Intervalle $I_n = \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ gegeben. Dadurch definieren wir

$$M := \{x \in \mathbb{R} : \; \text{es gibt ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } x \in I_n\}.$$

Zeigen Sie, dass M nicht kompakt ist, und geben Sie eine auf M stetige Funktion an, die ihr Maximum auf M nicht annimmt.

Aufgabe 40: Gegeben sei die Menge von komplexen Zahlen $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1 \text{ und } \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$. Betrachte die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit

$$f(z) = |\mathrm{Im}\,((2-i)z)|\,.$$

Besitzt f eine Maximal- und eine Minimalstelle? Falls ja, berechnen Sie je eine solche Stelle und die zugehörigen Funktionswerte!

Abgabetermin: Montag, den 9.1.2006, 11:00 Uhr, in den Fächern bei Zimmer 208.1 im Mathematikgebäude.

8. Tutorium
zur Vorlesung Höhere Mathematik I für
biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe T29: Welche der folgenden Mengen sind beschränkt, offen, abgeschlossen, kompakt?

(a) $M_1 = [-1, 42]$

(b) $M_2 = (-1, 42]$

(c) $M_3 = (-1, 42)$

(d) $M_4 = (-\infty, \infty)$

(e) $M_5 = \{z \in \mathbb{C} : -1 \leq \text{Im } z \leq 1\}$.

Aufgabe T30: Begründen Sie für die folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$, ob sie offen, abgeschlossen, beschränkt oder kompakt sind.

(a) $A = \left\{z \in \mathbb{C} :\ 0 < \text{Re}\left(\frac{z\bar{z}+2}{z\bar{z}+1}\right) < 3\right\}$

(b) $B = \{z \in \mathbb{C} :\ \text{Re}(z^2\bar{z}^2 + z - 5z\bar{z} - \bar{z} + 4) < 0\}$

Aufgabe T31: Geben Sie die Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$2x^5 - 6x^3 + 2x = 4x^4 - 6x^2 + 1$$

im Intervall $I = [-2, 2]$ an, und begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe T32: Zeigen Sie, dass es zu jeder Zeit zwei gegenüberliegende Punkte auf dem Erdäquator gibt, an denen die gleiche Temperatur herrscht.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass die Temperatur $t : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ auf dem Äquator eine stetige Funktion ist. Stellen sie eine Funktion für die Temperaturdifferenz gegenüberliegender Punkte auf und überlegen Sie, ob Sie darauf den Zwischenwertsatz anwenden können.

Tutorien: Dienstag, den 20.12.2005, bis Donnerstag, den 22.12.2005.