Mathematisches Institut II
Universität Karlsruhe (TH)
PD Dr. Frank Hettlich
Dr. T. Arens
Dipl.-Math. techn. S. Ritterbusch

41	42	43	44	45	$\sum$

Karlsruhe, den 9.1.2006

Matrikel-Nr.: ....

Matrikel-Nr.: ....

Gruppen-Nr.: ......

9. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik I für biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe 41: Prüfen Sie jeweils mit dem Quotienten-, Wurzel- und dem Majoranten-/Minorantenkriterium nach, ob die folgenden Reihen konvergieren oder divergieren.

$$\text{(a)} \quad \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}\right), \qquad \text{(b)} \quad \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}\right), \qquad \text{(c)} \quad \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2k+1}\right).$$

Aufgabe 42:

(a) Zeigen Sie, dass die Reihe $\left(\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k}{k^2-1}\right)$ konvergiert, aber nicht absolut konvergiert.

(b) Bestimmen Sie eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ so, dass jede Partialsumme $s_n = \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k+1} \frac{k}{k^2-1}$ um höchstens $\frac{1}{10}$ vom Grenzwert der Reihe abweicht, falls $n \geq N$ ist.

Aufgabe 43: Konvergieren die folgenden Reihen?

$$\text{(a)} \quad \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sqrt{k} - \sqrt{k+1}\right)\right) \qquad \text{(b)} \quad \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4k}{(k^2-1)^2}\right).$$

Hinweis: Bestimmen Sie jeweils eine allgemeine Darstellung für die n-te Partialsumme s_n.

Aufgabe 44: Zeigen Sie, dass die Reihe $\left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k+1}{2^k}\right)$ absolut konvergiert. Beweisen Sie anschließend für die Partialsummen s_n der Reihe durch vollständige Induktion die Darstellung

$$s_n = \frac{1}{9}\left(4 + (-1)^n \frac{3n+5}{2^n}\right), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

und nutzen Sie dieses Resultat zur Gewinnung des Grenzwerts s der Reihe.

Aufgabe 45: „Endlich ist die Weihnachtszeit vorbei“, denkt sich Lucifer, dem die Freude und Liebe der Feiertage sehr auf den Pferdefuß gegangen ist. Aus Rache will er aus allen unseren Reihen alle Summanden mit Zahlen mit Heiligenschein (das sind für ihn alle Zahlen mit Nullen) streichen und hofft damit die Welt unbemerkt in Inharmonie und Chaos stürzen zu können. Doch vielleicht können Sie seine Teufelei mit der nun in-harmonischen Reihe schnell enttarnen, wäre sie denn dann noch divergent?

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \frac{1}{17} + \frac{1}{18} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} + \ldots$$

Hinweis: Wie viele Kehrwerte j-stelliger Zahlen bleiben jeweils erhalten?

Abgabetermin: Montag, den 16.1.2006, 11:00 Uhr, in den Fächern bei Zimmer 208.1 im Mathematikgebäude.

9. Tutorium
zur Vorlesung Höhere Mathematik I für
biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe T33: Gegeben sei die Reihe $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)$ mit

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{-1}{2^n} & \text{für } n \text{ gerade} \\ \dfrac{1}{4^n} & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie mit dem Majorantenkriterium die absolute Konvergenz der Reihe.

(b) Zeigen Sie: Das Wurzelkriterium liefert auch die absolute Konvergenz der Reihe; mit dem Quotientenkriterium ist keine Aussage möglich.

(c) Schreiben Sie die Reihe als Summe von zwei geeigneten Reihen und berechnen Sie damit ihren Wert.

Aufgabe T34: Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvegrenz.

(a) $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{3+4i}{6}\right)^n\right)$, (c) $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n n!}{n^n}\right)$,

(b) $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2(n+1)^2}{n!}\right)$, (d) $\left(\sum_{n=8}^{\infty} \dfrac{n+7\sqrt{n}}{n^3-n}\right)$.

Aufgabe T35: Geben Sie zu den Reihen

(a) $\left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\dfrac{2}{2+3i}\right)^k\right)$, (b) $\left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(2\sqrt{k} - 4\sqrt{k+1} + 2\sqrt{k+2}\right)\right)$, (c) $\left(\sum_{k=3}^{\infty} \dfrac{8k}{(k^2-1)^2}\right)$

eine allgemeine Darstellung für die jeweils n-te Partialsumme s_n an und untersuchen Sie die Reihen auf Konvergenz oder Divergenz.

Aufgabe T36: Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

(a) $\left(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \dfrac{k+2\sqrt{k}}{k^2+4k+3}\right)$ (b) $\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left[\dfrac{(-1)^k}{k+3} - \dfrac{\cos(k\pi)}{k+2}\right]\right)$

Tutorien: Dienstag, den 10.1.2006, bis Donnerstag, den 12.1.2006.