

Gruppe
--------

Universität Karlsruhe (TH)  
 Institut für Algebra und Geometrie  
 Dr. T. Arens  
 Dipl.-Math.techn. S. Ritterbusch  
 Dr. H. Schon

51	52	53	54	55	Σ

Karlsruhe, den 23.1.2007

Matrikel-Nr.: .....  
 Matrikel-Nr.: .....  
 Matrikel-Nr.: .....

## 11. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik I für biw/ciw/mach/mage/vt

**Aufgabe 51:** Zeigen Sie durch vollständige Induktion

$$\frac{d^n}{dx^n}(e^x \sin x) = (\sqrt{2})^n e^x \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Hinweis: Belegen Sie zunächst die trigonometrische Identität

$$\sin x + \cos x = \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin \frac{\pi}{4}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Aufgabe 52:** Untersuchen Sie den Graphen der Funktion

$$y(x) = e^{-x} \sin x, \quad 0 \leq x \leq 3\pi,$$

d.h. berechnen Sie

- (a) die Nullstellen,
- (b) die lokalen und globalen Extremalstellen (Minima und Maxima),
- (c) die Wendepunkte (Bedingung ist  $y''(x) = 0!$ ) und die Wendetangente in mindestens einem Wendepunkt.

**Aufgabe 53:** Gegeben seien die Potenzreihen

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!}, \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k.$$

- (a) Bestimmen Sie die Bereiche, in denen Sie durch Ableiten der Potenzreihen die Ableitungen der Funktionen bestimmen können und berechnen Sie diese.
- (b) Finden Sie Polynome  $p$  und  $q$ , welche die Eigenschaften

$$p(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}, \quad q(x) = \frac{g(x)}{g'(x)}$$

für alle  $x$  erfüllen, für die die Potenzreihen konvergieren.

**Aufgabe 54:** Zeigen Sie für  $x \in [-1, 1]$

$$-1 + x - \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \leq \arctan(x) \leq 1 + x + \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

Hinweis: Untersuchen Sie Extrema der Differenzen der Terme.

**Aufgabe 55:** Bestimmen Sie auf  $x \in [0, 2]$  den Wertebereich von

$$f(x) = \log(x+1) - \frac{x^2}{2+2x}.$$

**Abgabetermin:** Freitag, den 2.2.2007, 12:00 Uhr, in den Fächern bei Zimmer 208.1 im Mathematikgebäude.

**11. Tutorium**  
**zur Vorlesung Höhere Mathematik I für**  
**biw/ciw/mach/mage/vt**

**Aufgabe T41:**

- (a) Geben Sie alle Stellen an, an denen für die Funktion

$$f(x) = x + 2 \sin x, \quad x \in \mathbb{R},$$

die Beziehung  $f'(x) = 0$  gilt. Welche davon sind tatsächlich lokale Extremstellen?

- (b) Untersuchen Sie auf die gleiche Weise die Funktion  $g(x) = x + \sin x, \quad x \in \mathbb{R}$ .

**Aufgabe T42:** Zeigen Sie für  $x \in [-1, 1]$  die Ungleichung

$$\arcsin(x) \leq \frac{\pi}{2} + 2x\sqrt{1-x^2}.$$

**Aufgabe T43:** Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right), \quad x > 1.$$

- (a) Berechnen Sie die Ableitung von  $f$ .  
(b) Für  $f$  gilt auch die Reihendarstellung

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)x^{2k+1}}.$$

Benutzen Sie diese Darstellung, um die Ableitung von  $f$  zu berechnen.

**Aufgabe T44:** Bestimmen Sie zu

$$f(x) = x \cosh\left(\frac{x^3}{6}\right)$$

die Werte der 12. und 13. Ableitung an  $x = 0$ , in dem Sie die Potenzreihe der Funktion betrachten.

**Tutorien:** Montag, den 29.01.2007, bis Mittwoch, den 31.01.2007.