Gruppe

Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. T. Arens
Dipl.-Math.techn. S. Ritterbusch
Dr. H. Schon

56	57	58	59	60	$\sum$

Karlsruhe, den 30.1.2007

Matrikel-Nr.: ....

Matrikel-Nr.: ....

Matrikel-Nr.: ....

12. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik I für biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe 56: Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \sqrt{x+1},\ x \geq 0\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Ableitungen von f die folgende Form haben:

$$f^{(k)}(x) = -(-1)^k \frac{(2k-2)!}{2^{2k-1}\,(k-1)!}(1+x)^{-\frac{2k-1}{2}}$$

(b) Stellen Sie die Taylorreihe von f im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ auf.

(c) Untersuchen Sie die Reihe

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)^2 (2n-1)}\right)$$

auf Konvergenz und bestimmmen Sie bei Konvergenz den Reihenwert.

Aufgabe 57: Berechnen Sie eine Näherung von $\sqrt[3]{e}$ mit Hilfe eines Taylor-Polynoms 3. Grades von $f(x) = e^x$ um $x_0 = 0$ und schätzen Sie den Fehler mit Hilfe der Restglieddarstellung von Lagrange unter der Annahme $\sqrt[3]{e} < 2$ ab.

Aufgabe 58: Gegeben ist

$$f(x) = \sqrt[3]{2x+2}\,,\ x \geq -1\,.$$

(a) Stellen Sie das Taylorpolynom 2. Grades von f am Entwicklungspunkt $x_0 = 3$ auf.

(b) Schätzen Sie das Lagrange-Restglied zum Taylorpolynom 2. Grades für $x \in [-\frac{1}{2}, 3]$ unabhängig von x ab.

Aufgabe 59: Berechnen Sie die Grenzwerte

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{a+2x}-\sqrt{a+x}}{x}, \quad a > 0,$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\cot x - \frac{1}{x}\right),$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\cot(x)\arcsin(x)\right),$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{\ln\tan 7x}{\ln\tan 2x}\,.$

Aufgabe 60: Bestimmen Sie folgende Grenzwerte

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x-\sin x}{x+\sin x},$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x}.$

Abgabetermin: Freitag, den 9.2.2007, 12:00 Uhr, in den Fächern bei Zimmer 208.1 im Mathematikgebäude.

12. Tutorium
zur Vorlesung Höhere Mathematik I für
biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe T45: Verwenden Sie die Taylor-Formel zweiter Ordnung mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und dem Lagrangeschen Restglied um die Einschließung

$$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 \le \ln(1+x) \le x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3, \qquad 0 \le x < \infty,$$

zu beweisen.

Aufgabe T46: Berechnen Sie alle Ableitungen $f^{(n)}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ der Funktion f und geben Sie damit die Taylorreihe für f an mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

$$\text{(a)} \quad f(x) = \cos\frac{x}{2},\ x \in \mathbb{R}, \qquad\qquad \text{(b)} \quad f(x) = \ln\frac{2+x}{2-x},\ |x| < 2.$$

Wo konvergieren diese Reihen? Untersuchen Sie in (a) zusätzlich die Konvergenz der Reihe im Konvergenzbereich gegen den Funktionswert durch Betrachtung des Lagrange-Restglieds.

Aufgabe T47: Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit den Regeln von l'Hospital:

$$\text{(a)} \lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3}, \qquad \text{(b)} \lim_{x\to\infty} \left(x + \frac{1}{\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)} \right),$$

$$\text{(c)} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\frac{\pi}{2} - x)}{\tan x}, \qquad \text{(d)} \lim_{x\to 0} x^{\tan x}.$$

Hinweis: Berechnen Sie bei (b) vorweg $\left(\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right)'$.

Aufgabe T48: Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^3 + ax^2 + x} - \frac{1}{\sin x}\right), \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}, \qquad \text{(c)} \quad \lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}.$$

Die Zahl $a \in \mathbb{R}$ aus Teil (a) ist ein fester Parameter.

Tutorien: Montag, den 5.2.2007, bis Mittwoch, den 7.2.2007.