Gruppe

Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. T. Arens
Dipl.-Math.techn. S.Ritterbusch
Dr. H. Schon

11	12	13	14	15	$\sum$

Karlsruhe, den 14.11.2006

Mat.-Nr.: ....

Mat.-Nr.: ....

Mat.-Nr.: ....

3. Übungsblatt
zur Vorlesung Höhere Mathematik I für mach/ciw/mage

Aufgabe 11: Gegeben seien im $\mathbb{R}^3$ die Vektoren $b_1 = (1, 1, -1)^\top$, $b_2 = (1, -1, 1)^\top$, $b_3 = (-1, 1, 1)^\top$ sowie $c_1 = (1, 3, -5)^\top$, $c_2 = (-2, 4, 2)^\top$, $c_3 = (5, -5, -9)^\top$.

(a) Zeigen Sie, dass die Vektoren b_1, b_2, b_3 eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden und berechnen Sie die Komponenten des Vektors $v = (1, -7, 3)^\top$ bezüglich dieser Basis.

(b) Prüfen Sie nach, ob auch die Vektoren c_1, c_2, c_3 eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden. Kann v als Linearkombination von c_1, c_2, c_3 dargestellt werden? Geben Sie ggf. alle Möglichkeiten an.

Aufgabe 12: Gegeben seien die Vektoren

$$u = (1, 0, -2, 3)^\top, v = (-3, 1, 6, 1)^\top, w = (-1, 1, 2, 7)^\top \in \mathbb{R}^4 .$$

(a) Bilden Sie die Linearkombinationen $u + v + w$, $u - 3v + w$, $3u - 2v$, $2u + v - w$.
(b) Zeigen Sie, dass je zwei der Vektoren linear unabhängig sind.
(c) Sind die drei Vektoren linear unabhängig? Bestimmen Sie eine Basis des Unterraumes $U := \operatorname{span}\{u, v, w\}$!

Aufgabe 13: (a) Schneiden sich die Geraden $g_1 : x = (-2, 5, 1)^\top + \lambda(3, -4, 2)^\top$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und g_2, welche durch die Punkte mit den Ortsvektoren $(1, 3, -4)^\top$, $(0, 5, -7)^\top$ verläuft?

(b) Bestimmen Sie die Schnittgerade der Ebenen $E_1 : x = (2, 0, 0)^\top + \alpha(1, 2, 0)^\top + \beta(0, 4, 1)^\top$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und E_2, welche die Punkte mit den Ortsvektoren $(1, 0, 0)^\top$, $(3, 0, 1)^\top$ und $(1, 2, 3)^\top$ enthlt.

Aufgabe 14: Gegeben seien die Ebenen $E_1 : x_1 + x_3 = 3$ und $E_2 : x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$ des $\mathbb{R}^3$ sowie die Gerade $g : x = (1, 1, 1)^\top + \lambda\,(1, 0, -1)^\top$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie die Schnittgerade h der beiden Ebenen.
(b) Welche geometrische Beziehung besteht zwischen g und h?
(c) Gibt es eine Ebene, die sowohl g als auch h enthält? Falls ja, geben Sie diese an!

Aufgabe 15: (a) Zeigen Sie, dass die Geraden

$$g : x = (1, 2, 5)^\top + t(-1, 1, 2)^\top,\ t \in \mathbb{R}, \qquad \text{und} \qquad h : y = (3, -1, 2)^\top + s(1, 1, 0)^\top, s \in \mathbb{R},$$

windschief sind, d.h nicht parallel sind und keine gemeinsamen Punkte haben.
(b) Bestimmen Sie die Schar aller Ebenen, die zu g und zu h parallel sind, in Normalform.

Abgabe: Werfen Sie Ihre Lösung bis spätestens Freitag, den 24.11.2006, 12:00 Uhr, in das zu Ihrer Tutoriumsgruppe gehörende Fach bei Zimmer 208.1 im Mathematikgebäude ein.