Gruppe

Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. T. Arens
Dipl.-Math.techn. S. Ritterbusch
Dr. H. Schon

41	42	43	44	45	$\sum$

Karlsruhe, den 9.1.2007

Matrikel-Nr.: ....

Matrikel-Nr.: ....

Matrikel-Nr.: ....

9. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik I für biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe 41: Die Funktionen $\frac{1}{z+1}$ und $\frac{1}{z+2}$ lassen sich als Potenzreihen um den Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ darstellen.

(a) Bestimmen Sie die beiden Potenzreihen und ihre Konvergenzradien.

(b) Berechnen Sie das Cauchy-Produkt der beiden Reihen, um die Funktion $\left(\frac{1}{z+1}\right) \cdot \left(\frac{1}{z+2}\right)$ als Potenzreihe darzustellen.

(c) Wo konvergiert das Cauchy-Produkt?

Aufgabe 42: Bestimmen Sie die Konvergenzradien der Potenzreihen:

$$\text{(a)} \quad \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{3(k+2)!}\right), \qquad \text{(b)} \quad \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{2k} \cdot 2^k}{(1+\frac{1}{k})^k}\right), \qquad \text{(c)} \quad \left(\sum_{k=0}^{\infty} k^k z^k\right).$$

Aufgabe 43: Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{\exp\left(x^4\right) - 1}.$$

Aufgabe 44: Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Potenzreihe

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{8^n}} \binom{n}{2} (x-2)^{3n}\right).$$

Aufgabe 45: Gesucht ist die Potenzreihe $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n\right)$ zu der Funktion

$$f(x) = \frac{e^x}{1-x}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

(a) Zeigen Sie $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Potenzreihe?

Abgabetermin: Freitag, den 19.1.2007, 12:00 Uhr, in den Fächern bei Zimmer 208.1 im Mathematikgebäude.

9. Tutorium
zur Vorlesung Höhere Mathematik I für
biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe T33: Gegeben ist die Funktion

$$f(z) = \frac{z-1}{z^2+2}.$$

(a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{C}$ von f.

(b) Stellen Sie f als eine Potenzreihe der Form $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)$ dar. Was ist der Konvergenzradius dieser Potenzreihe? (Hinweis: Wurzelkriterium).

Aufgabe T34: Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihen:

$$\text{(a)} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+2}{2^k} x^k\right), \qquad \text{(b)} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2+\frac{1}{k})^k}\right), \qquad \text{(c)} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{k+2}}{2^k} x^k\right).$$

Aufgabe T35: Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Potenzreihe

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left[\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}\right]^n (x+1)^n\right).$$

Aufgabe T36: Für die Funktionen cosh, sinh gilt

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \ \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \text{ für } x \in \mathbb{R} \text{ mit } e^x := \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

(a) Beweisen Sie die Identität $\cosh(2x) = [\cosh(x)]^2 + [\sinh(x)]^2$ mittels Cauchyprodukt.

(b) Läßt sich die Identität kürzer nachweisen?

(c) Bestimmen Sie die Potenzreihe für $f(x) = [\cosh(x)]^2 - [\sinh(x)]^2$.

Tutorien: Montag, den 15.01.2007, bis Mittwoch, den 17.01.2007.