Im zweiten Teil der Aufgabe war zu zeigen, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{8}{27}.$$

Im ersten Teil der Aufgabe hatten wir herausgefunden, dass die Taylorreihe von $f_k(x) = (1-x)^k$ folgendermaßen lautet:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{k+n} \frac{(k-1+n)!}{(k-1)!\,n!} (x-2)^n\right)$$

Die Frage ist nun, wie wir diese Reihe nutzen können, um die gesuchte Reihe zu berechnen. Versuchen wir zunächst das $(-1/2)^n$ in der Taylorreihe wiederzuentdecken: Dort haben wir schon ein $(-1)^n(x-2)^n$, welches für $x = \frac{5}{2}$ das gewünschte ergibt: $(-1)^n(\frac{5}{2}-2)^n = (-1)^n(\frac{1}{2})^n = (-1/2)^n$.

Was bleibt ist $(-1)^k$ und der Binomialkoeffizient. Mit der Darstellung

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!}$$

können wir sehen, wie wir dahin gelangen: Mit der Substitution $n = m-(k-1)$, bzw. $m = n+k-1$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{(k-1+n)!}{(k-1)!\,n!} &= \frac{(k-1+m-(k-1))!}{(k-1)!\,(m-(k-1))!} = \frac{m!}{(k-1)!\,(m-(k-1))!} \\
&= \binom{m}{k-1} = \binom{n+k-1}{k-1} \overset{!}{=} \binom{n+2}{2}
\end{aligned}$$

und sehen, dass wir für $k = 3$ genau den Term erhalten, den wir suchen. Insgesamt lautet unsere Taylorreihe für $x = \frac{5}{2}$ und $k = 3$:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^3 \binom{n+2}{2} (-1/2)^n\right)$$

Wir erhalten also genau das Negative der gesuchten Reihe. Den Wert der Taylorreihe kennen wir, wenn das Restglied verschwindet, es ist dann genau

$$f_3(\frac{5}{2}) = \frac{1}{(1-\frac{5}{2})^3} = -\frac{1}{\frac{27}{8}} = -\frac{8}{27}$$

und damit genau das erwünschte Ergebnis. Bis hier waren wir in der Übung gekommen. Es fehlt jetzt nur noch der Nachweis, dass das Restglied wirklich verschwindet. Wir betrachten den Betrag des Restglieds und erhalten mit der $n+1$-ten Ableitung von $f_k(x)$ für $z \in (2, \frac{5}{2})$:

$$\begin{aligned}
|R_n(\frac{5}{2}, 2)| &= \left|\frac{(-1)^{n+3}}{(n+1)!} \left(2-\frac{5}{2}\right)^{n+1} \frac{(3+n)!}{2!} (1-z)^{-(n+4)}\right| \\
&= \frac{(n+2)(n+3)}{4 \cdot 2^n} \cdot \underbrace{\frac{1}{|1-z|^{n+4}}}_{\leq 1} \leq \frac{(n+2)(n+3)}{4 \cdot 2^n} \xrightarrow{n \to \infty} 0
\end{aligned}$$

Wobei die Abschätzung gilt, da $|1-z|$ streng monoton steigend auf $(2, \frac{5}{2})$ ist, und somit der Bruch den größten Wert für $z = 2$ erhält. Somit verschwindet das Restglied für $x = \frac{5}{2}$ und die Taylorreihe stimmt mit der Funktion überein. Deswegen ist der Reihenwert tatsächlich $\frac{8}{27}$.