8. Übung

1. Aufgabe: Es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < \beta$. Zeigen Sie, dass es ein $x_0 \in (\alpha, \beta)$ gibt mit

$$\frac{x^2+1}{x-\alpha} + \frac{x^6+1}{x-\beta} = 0.$$

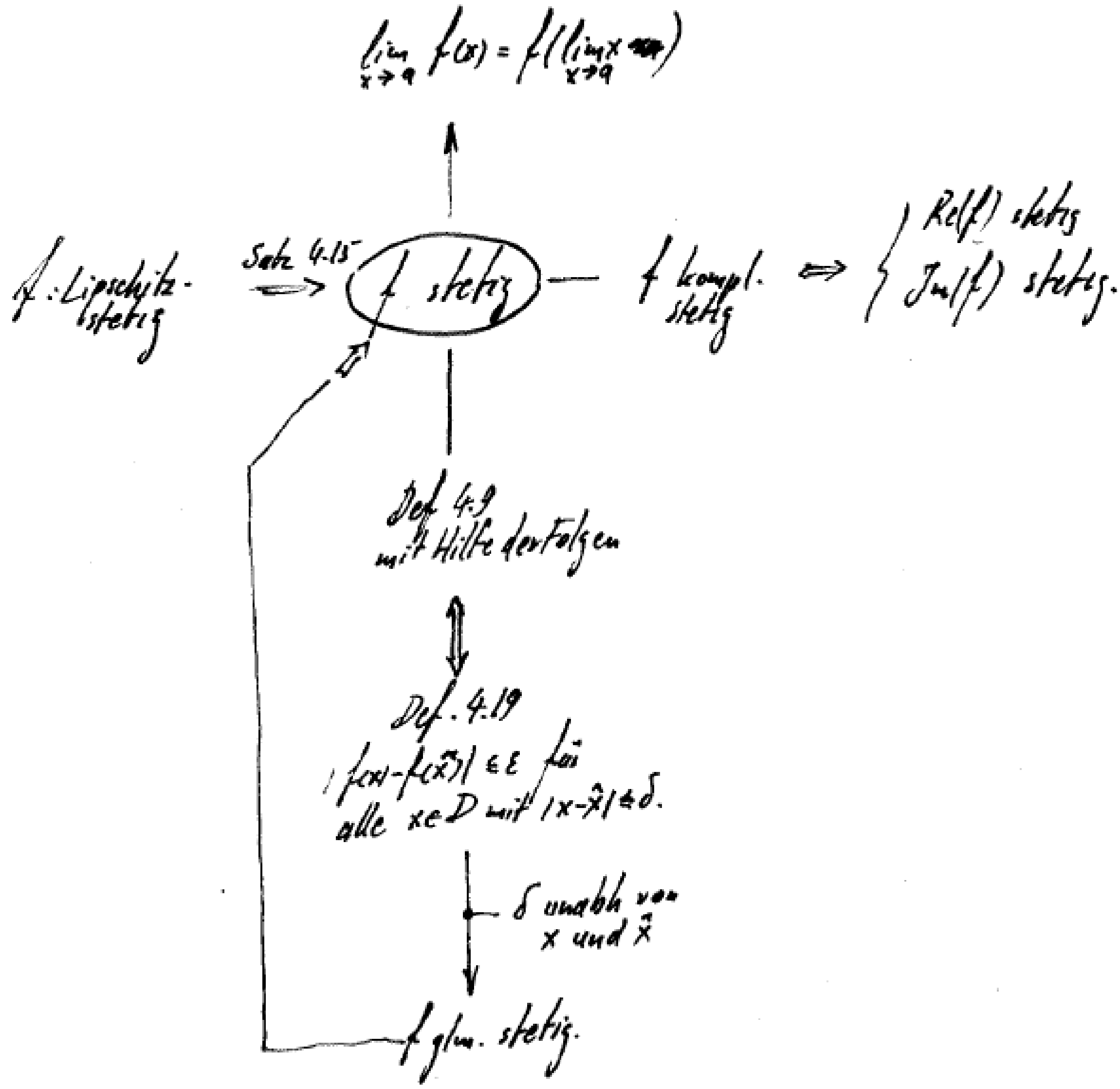
2. Aufgabe:

a) Gegeben sei f: $f(x) = \sqrt{x+c} + d$, $c, d \in \mathbb{R}$.
Für welche x ist f wohldefiniert? Geben Sie für $c = -2008$, $d \in \mathbb{R}$ die Lipschitz-Konstante auf $[2009, 2010]$ an.

b) Geben Sie die Lipschitz-Konstante von g: $g(x) = x^2 + x + 1$ auf $[2007, 2008]$ an.

3. Aufgabe: Die Funktion f: $f(x) = \begin{cases} 2(x-1)^2, & x < -1 \\ 3, & x = 0 \\ x-1, & x > 1 \end{cases}$ soll durch ein Polynom p kleinstmöglichen Grades zu einer auf ganz $\mathbb{R}$ stetigen Funktion fortgesetzt werden.

Miniaufgabe: Gegeben sei eine Gerade $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax + b$, mit $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$. Begründen Sie die Existenz einer Nullstelle.



Dabei steht … für den Satz „Zu vorgegebenem $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft“:

$\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$	: …	$\lvert f(x) - \eta\rvert < \epsilon$ für $\lvert x - \xi\rvert < \delta$, $x \neq \xi$, $x \in D$;
f stetig in ξ	: …	$\lvert f(x) - f(\xi)\rvert < \epsilon$ für $\lvert x - \xi\rvert < \delta$, $x \in D$;
f gleichmäßig stetig in D	: …	$\lvert f(x) - f(y)\rvert < \epsilon$ für alle $x, y \in D$ mit $\lvert x - y\rvert < \delta$;
f lipschitzstetig in D	$\Longleftrightarrow$	$\lvert f(x) - f(y)\rvert \leq L\lvert x - y\rvert$ für $x, y \in D$.

4.3 Spezielle Eigenschaften reellwertiger Funktionen