Gruppe

Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. F. Hettlich
Dipl.-Math.techn. S. Ritterbusch
Dipl.-Math.techn. A. Schkarbanenko

1	2	3	4	5	$\sum$

Karlsruhe, den 30.10.2007

Matrikel-Nr.: ....

Matrikel-Nr.: ....

1. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik I für biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe 1: Zwei Teilmengen A, $B \subseteq \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$A := \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 2| \leq 4 - x\} \qquad \text{und} \qquad B := \left\{x \in \mathbb{R} : 1 - |x-2| < \frac{1}{2}|x-3|\right\}.$$

Schreiben Sie die Mengen $A \cup B$, $A \cap B$ und $A \setminus B$ als Intervalle oder Vereinigungen von Intervallen.

Aufgabe 2: Berechnen Sie folgende Summen:

$$\text{(a)} \sum_{n=7}^{42} \left(\frac{1}{3}\right)^n, \qquad \text{(b)} \sum_{m=1}^{10} (n+1)^3, \qquad \text{(c)} \sum_{\mu=0}^{1} \sum_{\nu=2}^{4} \frac{1}{\mu + \nu^2}.$$

Aufgabe 3: Zeigen Sie durch vollständige Induktion

$$(a) \quad 2^n \geq n^2, \quad n \in \mathbb{N}_{\geq 4}, \qquad (b) \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}, \qquad n \geq 1.$$

Aufgabe 4: Man zeige durch vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N}$:

$$\text{(a)} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \geq \frac{1}{2}, \qquad \text{(b)} \quad \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} = 2^n.$$

Aufgabe 5: Ein Ball fällt aus der Höhe h_1 senkrecht zu Boden, von dort prallt er zurück, erreicht allerdings jetzt nur noch die Höhe $h_2 = \frac{3}{4}h_1$, fällt wieder auf den Boden und erreicht jetzt die Höhe $h_3 = \frac{3}{4}h_2$ und so fort. Welchen Gesamtweg hat der Ball bis zur 10. Bodenberührung zurückgelegt?

Abgabetermin: Donnerstag, den 8.11.2007, 13:00 Uhr, in den Fächern bei Zimmer 208.1 im Mathematikgebäude.

1. Tutorium
zur Vorlesung Höhere Mathematik I für
biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe T1: Gegeben seien die Mengen

$$I := \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1-x}{3-x} \leq 0 \right\} \qquad \text{und} \qquad J := \{ x \in \mathbb{R} : |x+1| + |x-1| > 3 \}\,.$$

(a) Finden Sie Darstellungen von I bzw. J als Intervalle oder Verknüpfung (Durchschnitt, Vereinigung) von Intervallen.

(b) Bestimmen Sie $I \cap J$ und $J \setminus I$.

Aufgabe T2: Berechnen Sie folgende Summen:

$$\text{(a)} \sum_{n=17}^{63} n, \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{8} (n-1/2)^2, \qquad \text{(c)} \sum_{\nu=1}^{4} \sum_{k=1}^{\nu} \nu\,(\nu - k).$$

Aufgabe T3: Zeigen Sie durch vollständige Induktion

$$\text{(a)} \quad n^2 > 2n+1, \quad n \geq 3, \quad n \in \mathbb{N}, \qquad \text{(b)} \quad \sum_{k=0}^{n} (2k+1) = (n+1)^2, \quad n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Aufgabe T4: Man zeige durch vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N}$:

$$\text{(a)} \quad \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} j^2 = (-1)^{n-1} \binom{n+1}{2}, \quad n \in \mathbb{N}, \qquad \text{(b)} \quad \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{n}{2}.$$

Tutorien: Montag, den 5.11.2007, bis Mittwoch, den 7.11.2007.