Gruppe

Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. F. Hettlich
Dipl.-Math.techn. S. Ritterbusch
Dipl.-Math.techn. A. Schkarbanenko

51	52	53	54	55	$\sum$

Karlsruhe, den 22.01.2008

Matrikel-Nr.: ....

Matrikel-Nr.: ....

11. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik I für biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe 51: Lösen Sie die komplexe Gleichungen

(a) $(\sinh(iz) + \cosh(iz))^2 + 2\sin(2z) = 0$, (b) $(\sinh(iz) + \cosh(iz))\sin(2z) = \sqrt{2}(i\sin(z) + \cos(z))$.

verwenden Sie die quadratische Ergänzung anstatt der pq-Formel.

Aufgabe 52: Berechnen Sie die Ableitung der Funktionen in ihrem Definitionsbereich:

(a) $f(x) = \cos^2 x \cdot \cos(x^2)$,

(b) $f(x) = \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)$,

(c) $f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

(d) $f(x) = \sin x + \frac{1}{\sin x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}, k \in \mathbb{Z}$,

(e) $f(x) = a^{(x^x)}, \quad a > 0, x \in \mathbb{R}_{>0}$,

(f) $f(x) = x^{(a^x)}, \quad a > 0, x \in \mathbb{R}_{>0}$.

Aufgabe 53: Die Umkehrfunktion des Tangens ist die Funktion

$$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

(a) Berechnen Sie die Ableitung von arctan mit der Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion.

(b) Für $|x| < 1$ kann arctan in eine Potenzreihe entwickelt werden:

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Berechnen Sie $(\arctan x)'$ nun, indem Sie diese Potenzreihe differenzieren.

Aufgabe 54: Gegeben seien die Potenzreihen

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!}, \qquad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k.$$

(a) Bestimmen Sie die Bereiche, in denen Sie durch Ableiten der Potenzreihen die Ableitungen der Funktionen bestimmen können und berechnen Sie diese.

(b) Finden Sie Polynome p und q, welche die Eigenschaften

$$p(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}, \qquad q(x) = \frac{g(x)}{g'(x)}$$

für alle x erfüllen, für die die Potenzreihen konvergieren.

Aufgabe 55: Zeigen Sie für $x \in [-1, 1]$ die Ungleichung

$$\arcsin(x) \leq \frac{\pi}{2} + 2x\sqrt{1-x^2}.$$

Abgabetermin: Donnerstag, den 31.01.2008, 13:00 Uhr, in den Fächern bei Zimmer 208.1 im Mathematikgebäude.

11. Tutorium
zur Vorlesung Höhere Mathematik I für biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe T41: Bestimmen sie alle $z \in \mathbb{C}$, die der Gleichung

$$\sin z = 25$$

genügen.

Aufgabe T42: Berechnen Sie die Ableitung der Funktionen in ihrem Definitionsbereich:

(a) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$,

(b) $f(x) = \frac{\cos^2 x}{1+\cot x} + \frac{\sin^2 x}{1+\tan x}$,

(c) $f(x) = (\sqrt{x}+1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)$,

(d) $f(x) = e^x \cos^2 x(\cos x + 3\sin x)$.

Aufgabe T43: Untersuchen Sie den Graphen der Funktion

$$y(x) = e^{-x}\sin x, \quad 0 \le x \le 3\pi,$$

d.h. berechnen Sie

(a) die Nullstellen,

(b) die Extremwerte (Minima und Maxima),

(c) die Wendepunkte (Bedingung ist $y''(x) = 0$!) und die Wendetangente in mindestens einem Wendepunkt.

Aufgabe T44: Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right), \qquad x > 1.$$

(a) Berechnen Sie die Ableitung von f.

(b) Für f gilt auch die Reihendarstellung

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)\,x^{2k+1}}.$$

Benutzen Sie diese Darstellung, um die Ableitung von f zu berechnen.

Tutorien: Montag, den 28.01.2008, bis Mittwoch, den 30.01.2008.