Gruppe

Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. F. Hettlich
Dipl.-Math.techn. S. Ritterbusch
Dipl.-Math.techn. A. Schkarbanenko

56	57	58	59	60	$\sum$

Karlsruhe, den 29.01.2008

Matrikel-Nr.: ....

Matrikel-Nr.: ....

12. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik I für biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe 56: Beweisen Sie die folgenden Ungleichungen mit dem Mittelwertsatz:

$$\text{(a) } |\cos e^x - \cos e^y| \le |x-y| \text{ für } x, y \le 0\,, \qquad \text{(b) } \ln(1+x) \le \frac{x}{\sqrt{1+x}} \text{ für } x > 0\,.$$

Hinweis zu (b): Betrachten Sie $f(t) = \ln(1+t) - \frac{t}{\sqrt{1+t}}$ im Intervall $[0, x]$.

Aufgabe 57: Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\text{(a) } \lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3}, \quad \text{(b) } \lim_{x\to\infty} \left(x + \frac{1}{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)} \right), \quad \text{(c) } \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\frac{\pi}{2}-x)}{\tan x}, \quad \text{(d) } \lim_{x\to 0} x^{\tan x}, \quad \text{(e) } \lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x}\,.$$

Hinweis: Bei (b) berechne man vorweg $\left(\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)'$.

Aufgabe 58: Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

$$\text{(i) } \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\, e^x}{(e^x-1)^2}, \qquad \text{(ii) } \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{\sin(x^2)}.$$

und bestimmen Sie die Konstante $c \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion $f(x) = \begin{cases} c, & x = 1, \\ \frac{2^{\ln x} - x}{\ln x}, & x \neq 1, \end{cases}$ auf $\mathbb{R}_{>0}$ stetig ist.

Aufgabe 59: Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sqrt{x+1},\ x \ge 0\,.$

(a) Zeigen Sie, dass die Ableitungen von f die folgende Form haben:

$$f^{(k)}(x) = -(-1)^k \frac{(2k-2)!}{2^{2k-1}\,(k-1)!}(1+x)^{-\frac{2k-1}{2}}$$

(b) Stellen Sie die Taylorreihe von f im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ auf.

(c) Untersuchen Sie die Reihe

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)^2 (2n-1)} \right)$$

auf Konvergenz und bestimmmen Sie bei Konvergenz den Reihenwert.

Aufgabe 60: Verwenden Sie die Taylor-Formel zweiter Ordnung mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und dem Lagrangeschen Restglied um die Einschließung

$$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 \le \ln(1+x) \le x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3, \qquad 0 \le x < \infty,$$

zu beweisen.

Abgabetermin: Donnerstag, den 07.02.2008, 13:00 Uhr, in den Fächern bei Zimmer 208.1 im Mathematikgebäude.

12. Tutorium
zur Vorlesung Höhere Mathematik I für biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe T45: Man beweise für alle reellen Zahlen $x \geq e^2$ die Ungleichung

$$\sqrt{x} > \ln x$$

durch Fallunterscheidung $x = e^2$ und $x > e^2$, wobei im zweiten Fall der Mittelwertsatz der Differentialrechnung anzuwenden ist.

Hinweis: Man betrachte die Funktion $f(x) = \sqrt{x} - \ln x$ in einem geeigneten Definitionsbereich.

Aufgabe T46: Berechnen Sie die Grenzwerte

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{a+2x}-\sqrt{a+x}}{x}, \quad a > 0,$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\cot x - \frac{1}{x}\right),$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\cot(x) \arcsin(x)\right),$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{\ln\tan 7x}{\ln\tan 2x}$

Aufgabe T47: Für die Funktion $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $0 < x$, berechne man das Taylorpolynom vom Grade 2 für den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und schätze den Fehler ab.

Aufgabe T48: Berechnen Sie alle Ableitungen $f^{(n)}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ der Funktion f und geben Sie damit die Taylorreihe für f an mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(a) $f(x) = \cos\dfrac{x}{2},\ x \in \mathbb{R},$

(b) $f(x) = \ln\dfrac{2+x}{2-x},\ |x| < 2.$

Wo konvergieren diese Reihen?

Tutorien: Montag, den 4.02.2008, bis Mittwoch, den 6.02.2008.