Gruppe

Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. F. Hettlich
Dipl.-Math.techn. S. Ritterbusch
Dipl.-Math.techn. A. Schkarbanenko

6	7	8	9	10	$\sum$

Karlsruhe, den 6.11.2007

Matrikel-Nr.: ....

Matrikel-Nr.: ....

2. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik I für biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe 6: Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 - 3i$, $z_3 = \sqrt{3} + i$. Berechnen Sie

(a) Real- und Imaginärteil der komplexen Zahlen $\overline{z_j}$, $-z_j$, $z_j\overline{z_j}$, $\dfrac{1}{z_j}$, $z_j - \overline{z_j}$ und $|z_j|$, jeweils für $j = 1, 2$, sowie der Zahlen
$$\frac{z_1}{z_1 + z_2}, \qquad \text{und} \qquad z_1^3 z_2^2.$$

(b) die Polarkoordinatendarstellung (r, φ) von z_3, wo φ dem Hauptwert des Arguments von z_3 entspricht.

Aufgabe 7: Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil aller $\omega \in \mathbb{C}$, welche der Beziehung $\omega^2 = \frac{3}{1-3i} - \frac{1}{3+i}$ genügen,

(a) mit Hilfe des Ansatzes $\omega = x + iy$,

(b) mit Hilfe von Polarkoordinaten.

Aufgabe 8: Welche komplexe Zahlen erfüllen die Bedingung

(a) $(\mathrm{Im}(2z + i))^2 - 1 \leq 4|z|^2 - 8\mathrm{Re}(z) < -(z - \overline{z})^2$,

(b) $z^4 + (2i + 2)z^2 + 4i = 0$?

Skizzieren Sie für Teil (a) auch die Lösungsmenge in der komplexen Zahlenebene.

Aufgabe 9: Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ gilt
$$\sum_{j=1}^{n} \left[\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi j}{n}\right)\right] = 0.$$

Veranschaulichen Sie diese Aussage geometrisch am Fall $n = 3$.

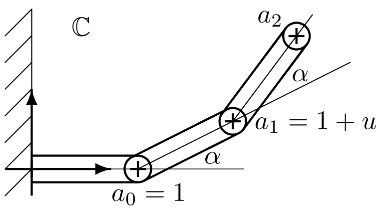
Hinweis: Zeigen Sie zunächst mit vollständiger Induktion: für $j \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt
$$\cos(\alpha j) + i \sin(\alpha j) = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^j\,,$$
und wenden Sie dann die geometrische Summenformel an!

Aufgabe 10: Als Modell für den Schwanz eines Reptils mit n Wirbelknochen betrachten wir ein n-fach Pendel, mit starrem ersten Segment, alle Stangen haben die Länge 1, und alle Gelenke die Auslenkung α. Im Folgenden sei $u = \cos\alpha + i \sin\alpha$.

(a) Die Variablen a_k bezeichnen die Position der Gelenke auf der komplexen Zahlenebene. Drücken Sie a_2 in Abhängigkeit von u aus und zeigen Sie die Formel $a_n = \frac{1-u^{n+1}}{1-u}$, für $u \neq 1$.

(b) Zeigen Sie, dass $\overline{1-u} = 1 - \frac{1}{u}$ und $u + \frac{1}{u} = 2\cos\alpha$ ist.

(c) Berechnen Sie den Ausdruck $\mathrm{Im}(a_n)$ und bestimmen Sie die Auslenkung des Endpunkt des Pendels in Richtung der imaginären Achse für $n = 10$ und $\alpha = \frac{\pi}{6}$.



Abgabetermin: Donnerstag, den 15.11.2007, 13:00 Uhr, in den Fächern bei Zimmer 208.1 im Mathematikgebäude.

2. Tutorium
zur Vorlesung Höhere Mathematik I für
biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe T5: Für die komplexe Zahl

$$w = \frac{(\overline{2-i})z - 1 + 2i}{z+i} \quad ; \quad z = x + iy \in \mathbb{C}\backslash\{-i\}$$

berechne man Real- und Imaginärteil, sowie Betrag und Argument in Abhängigkeit von x und y.

Aufgabe T6: Berechnen Sie Real- und Imaginärteil der Zahl $z = (1+i)^5$

(a) mit Hilfe der binomischen Formel,

(b) unter Verwendung der Polardarstellung von $1+i$.

(c) Nach welcher der in (a) bzw. (b) genannten Methode sollte man also $w = (1-i)^{17}$ berechnen? Bestimmen Sie $\operatorname{Re} w$ und $\operatorname{Im} w$.

Aufgabe T7: Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil aller Lösungen $w \in \mathbb{C}$ der Gleichung

(a) $w^2 = -5 + 12i$, (b) $w^2 + 6iw - 6 = 4i$.

Aufgabe T8: Skizzieren Sie die Menge aller komplexen Zahlen z, die der jeweiligen Bedingung genügen:

(a) $|3z - 1 + 2i| \leq 2$,

(b) $|z - z_0| = |z - z_1|$ für $z_0 = 1 - i$, $z_1 = 2 + i$,

(c) $|\mathrm{Re} z| + |\mathrm{Im} z| \leq a$, $a > 0$ festgehalten,

(d) $|z|^2 \leq \mathrm{Re} z$.

Tutorien: Montag, den 12.11.2007, bis Mittwoch, den 14.11.2007.