Gruppe

Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. F. Hettlich
Dipl.-Math.techn. S. Ritterbusch
Dipl.-Math.techn. A. Schkarbanenko

16	17	18	19	20	$\sum$

Karlsruhe, den 20.11.2007

Matrikel-Nr.: ....

Matrikel-Nr.: ....

4. Übungsblatt
zur Vorlesung Höhere Mathematik I für
biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe 16: Gegeben seien die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie alle Vektoren $u \in \mathbb{R}^3$, so dass sowohl die Menge $\{a, b, u\}$ als auch die Menge $\{x, y, u\}$ linear abhängig ist.

(b) Sei weiterhin $c = (1, -4, -4)^\top$, welche Dimensionen haben dann die Unterräume $U = \operatorname{span}\{a, b, c\}$ und $V = \operatorname{span}\{c, x, y\}$? Geben Sie jeweils eine Basis von U und V an.

Aufgabe 17: Gegeben seien im $\mathbb{R}^3$ die Vektoren $b_1 = (1, 0, 0)^\top$, $b_2 = (1, 1, 0)^\top$, $b_3 = (1, 1, 1)^\top$ sowie $c_1 = (3, 5, 2)^\top$, $c_2 = (1, 1, -1)^\top$, $c_3 = (1, 3, 4)^\top$.

(a) Zeigen Sie, dass die Vektoren b_1, b_2, b_3 eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden und berechnen Sie die Komponenten des Vektors $(1, 3, 0)^\top$ bezüglich dieser Basis.

(b) Prüfen Sie nach, ob auch die Vektoren c_1, c_2, c_3 eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

Aufgabe 18: Gegeben seien die Geraden $g_1 :\ x = (3, 1, 3)^\top + \lambda(1, 2, -2)^\top$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $g_2 :\ x = (-2, 1, -1)^\top + \mu(0, 1, 1)^\top$, $\mu \in \mathbb{R}$.

(a) Schneiden sich die Geraden g_1 und g_2? Berechnen Sie entweder den Schnittpunkt oder den Abstand der beiden Geraden.

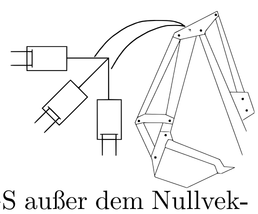
(b) Bestimmen Sie jeweils die Ebene E_1, die g_1 enthält und zu g_2 senkrecht ist, und die Ebene E_2, die g_2 enthält und zu g_1 senkrecht ist. Unter welchem Winkel schneiden sich die beiden Ebenen?

Aufgabe 19: Gegeben seien die Punkte $P = (2|1|0)$, $Q = (1|3| - 1)$ und $R = (0|2|0)$.

(a) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung und Normalform der Ebene E auf den Punkten P, Q, R.

(b) Schneidet die Gerade $g : x(u) = (-2, -7, 0)^\top + u(3, 2, 1)^\top$ die Ebene E? Wenn ja bestimmen Sie Schnittpunkt und Schnittwinkel.

Aufgabe 20: *Durch eine Dehnmessstreifen-Rosette kann auf der Oberfläche eines Bewegungsmechanismus einer Baggerschaufel der Verzerrungszustand in Form des Verzerrungstensors bzgl. des x_1, x_2, x_3-Koordinatensystems bestimmt werden. Aus dem Tensor will man die Hauptdehnungen bestimmen. Diese sind bei isotropen Materialien ein Maß für die auftretenden maximalen Kräfte in den zugehörigen Richtungen. Zum aus der Messung bestimmten Tensor ε betrachten wir das nebenstehende LGS mit Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$:*



$$\varepsilon = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 142 & -144 & 0 \\ -144 & 58 & 0 \\ 0 & 0 & -125 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{rrrcl} 142x_1 & -144x_2 & & = & 50\lambda x_1 \\ -144x_1 & +58x_2 & & = & 50\lambda x_2 \\ & & -125x_3 & = & 50\lambda x_3 \end{array}$$

Bestimmen Sie die Hauptdehnungen, d.h. alle $\lambda \in \mathbb{R}$, für die Sie weitere Lösungen zum LGS außer dem Nullvektor bestimmen können und geben Sie jeweils zu jeder Hauptdehnung eine auf die Länge 1 normierte Lösung als zugehörige Hauptdehnungsrichtung an. Unter welchem Winkel stehen die Hauptdehnungsrichtung zueinander, bilden sie eine Basis, und um welchen Winkel sind sie zur Standardbasis verdreht?

Abgabetermin: Donnerstag, den 29.11.2007, 13:00 Uhr, in den Fächern bei Zimmer 208.1 im Mathematikgebäude.

4. Tutorium
zur Vorlesung Höhere Mathematik I für
biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe T13: Weisen Sie nach, daß die Vektoren

$$u = (1, 2, 0)^\top, \quad v = (0, 1, 0)^\top, \quad w = (1, 1, 1)^\top$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden. Stellen Sie den Vektor

$$a = (3, 2, 2)^\top$$

als Linearkombination von u, v, w dar.

Aufgabe T14: Gegeben sind die folgenden Vektoren aus dem $\mathbb{R}^3$,

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Stellen Sie den Vektor $x = (-3, 4, 7)^\top$ als Linearkombination von u, v und w dar.

(b) Sind u, v und w linear unabhängig?

(c) Sei ferner $y = (1, 0, 1)^\top$. Bildet die Menge $\{u, v, y\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

Aufgabe T15: Gegeben ist Gerade $g : x(s) = (5, 1, -1)^\top + s(4, 0, -3)^\top,\ s \in \mathbb{R}$, sowie die Punkte $P = (2|0|2)$ und $Q = (0|2|2)$.

(a) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Geraden h, die durch P und Q verläuft.

(b) Bestimmen Sie den Punkt R auf g so, dass die Ebene E_1 durch P, Q und R parallel ist zur Ebene E_2, die durch $2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$ beschrieben ist. Welchen Abstand haben die Ebenen von einander?

(c) Unter welchem Winkel schneidet g die beiden Ebenen?

Aufgabe T16: Gegeben seien die Ebenen

$$E_1 : x_1 + x_3 = 3 \qquad \text{und} \qquad E_2 : x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$$

des $\mathbb{R}^3$ sowie die Gerade

$$g : x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestimmen Sie die Schnittgerade h der beiden Ebenen.

(b) Welche geometrische Beziehung besteht zwischen g und h. Bestimmen Sie gegebenenfalls Schnittpunkt und Schnittwinkel oder Abstand der beiden Geraden.

Tutorien: Montag, den 26.11.2007, bis Mittwoch, den 28.11.2007.