| |
|---|
| Gruppe |

Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. F. Hettlich
Dipl.-Math.techn. S. Ritterbusch
Dipl.-Math.techn. A. Schkarbanenko

| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

Karlsruhe, den 27.11.2007

Matrikel-Nr.: ..................

Matrikel-Nr.: ..................

# 5. Übungsblatt
# zur Vorlesung Höhere Mathematik I für
# biw/ciw/mach/mage/vt

**Aufgabe 21:** Gegeben seien $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ -1 & 7 & -1 & -1 \\ 5 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, $b_1 = (1,1,1,1)^\top$, $b_2 = (1,0,-1,0)^\top$ und $y = (1,3,5,3)^\top$.

(a) Finden Sie $b_3$ und $b_4$, sodass $b_1$, $b_2$, $b_3$ und $b_4$ orthogonal zu einander sind.

(b) Bestimmen Sie die Vektoren $Ab_k$ und prüfen Sie, ob es $\alpha_k$ gibt, sodass $Ab_k = \alpha_k b_k$, $k = 1,2,3,4$.

(c) Stellen Sie $y$ als Linearkombination aus $b_k$, $k = 1,2,3,4$ dar, d.h. finden Sie die Darstellung $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 + \lambda_4 b_4 = y$. Hinweis: Skalarprodukt und die Orthogonalität der Vektoren $b_k$, $k = 1,2,3,4$.

(d) Bestimmen Sie $x$ als Linearkombination der Vektoren $b_k$, $k = 1,2,3,4$ durch die gewonnenen $\alpha_k$ und $\lambda_k$ in $Ax = y$.

**Aufgabe 22:** Eine Drehung um den Winkel $\phi$ wird in $\mathbb{R}^2$ durch die folgende Matrix $D_\phi$ beschrieben:

$$D_\phi = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

(a) Bestimmen Sie $D_\phi x$, wobei $x = (x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2$.

(b) Zeigen Sie, dass durch die Drehung der Betrag von $x$ unverändert bleibt.

(c) Sei $x = (1,1)^\top$. Bestimmen Sie $x \cdot D_\phi x$ für $\phi = \pi/2$ bzw. $\phi = \pi$. Interpretieren Sie das Ergebnis.

**Aufgabe 23:** Gegeben sei die Folge $(a_n)_n$ mit den Folgengliedern $a_n = \dfrac{n+1}{(n+2)^2}$. Zeigen Sie $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, indem Sie zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $N_\varepsilon$ derart bestimmen, dass gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon$. Geben Sie ein gültiges $N_\varepsilon$ an für i) $\varepsilon = \frac{1}{10}$, ii) $\varepsilon = \frac{1}{100}$, iii) $\varepsilon = 10^{-10}$.

**Aufgabe 24:** Die Folge $(a_n)_n$ sei rekursiv durch einen Startwert $a_1 \in [0,2]$ und die Vorschrift $a_{n+1} = \frac{a_n\,(a_n^2+3)}{3a_n^2+1}$, $n \in \mathbb{N}$, gegeben. Zeigen Sie

(a) die Gleichung $a_{n+1} - 1 = (a_n - 1)^3/(3a_n^2 + 1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

(b) für einen Startwert $a_1 \in (0,1)$ besitzt $(a_n)_n$ die untere Schranke 0 sowie die obere Schranke 1 und es gilt $a_{n+1}/a_n \geq 1$,

(c) für die Startwerte $a_1 = 0$ und $a_1 = 1$ ist $(a_n)_n$ konstant.

**Aufgabe 25:** Gegeben ist eine Folge von Finite-Elemente-Gittern (siehe Skizze auf der Rückseite).

(a) Stellen Sie die Anzahl der Knoten $a_n$ bzw. die Anzahl der Dreiecke $b_n$ im $n$-ten Gitter rekursiv dar.

(b) Geben Sie eine explizite Formel für $a_n$ bzw. $b_n$ an, d.h nicht rekursiv und ohne Summenzeichen. Zeigen Sie die Äquivalenz der rekursiven und expliziten Darstellung von $b_n$ durch vollständige Induktion.

(c) Zeigen Sie, dass die Folge $(c_n)_n$ mit den Gliedern $c_n := a_n/b_n$, $n > 1$ eine untere Schranke 1/2 hat.

**Abgabetermin:** Donnerstag, den 6.12.2007, 13:00 Uhr, in den Fächern bei Zimmer 208.1 im Mathematikgebäude.

## 5. Tutorium
## zur Vorlesung Höhere Mathematik I für biw/ciw/mach/mage/vt

**Aufgabe T17:** Gegeben seien eine Basis von $\mathbb{R}^3$: $\{b_1, b_2, b_3\} = \{(1,2,3)^\top, (1,1,-1)^\top, (5,-4,1)^\top\}$ und $y = (7,0,7)^\top$.

(a) Prüfen Sie nach, ob es sich um eine Orthogonalbasis handelt.

(b) Stellen Sie $y$ als Linearkombination dieser drei Vektoren dar. Wenden Sie dabei das Skalarprodukt auf die aufgestellte Gleichung an und nutzen Sie die Orthogonalität der Vektoren $b_1$, $b_2$, $b_3$ aus.

**Aufgabe T18:** Gegeben sei die reelle Folge $(a_n)_n$ mit den Folgengliedern

$$a_n = \frac{1}{2} + (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Ist die Folge beschränkt? Falls ja, gebe das kleinstmögliche $r$ an mit $|a_n| \leq r$. Begründen Sie Ihre Antwort.

**Aufgabe T19:** Gegeben sei die Folge $(a_n)_n$ mit den Gliedern $a_n = \frac{n-1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie einen Folgenindex $N_\varepsilon$ derart, daß $|a_n - 1| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon$, wenn

(a) $\varepsilon > 0$ ,    (b) $\varepsilon = \dfrac{1}{10}$,    (c) $\varepsilon = \dfrac{1}{1000}$    beliebig ist.

(d) Konvergiert die Folge $(a_n)_n$? Falls ja, was ist ihr Grenzwert?

**Aufgabe T20:** Welchen Grenzwert vermuten Sie für die Folge $(a_n)_n$ mit

$$a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}, \quad n \in \mathbb{N}?$$

Beweisen Sie Ihre Vermutung mit Hilfe der Definition des Grenzwertes.

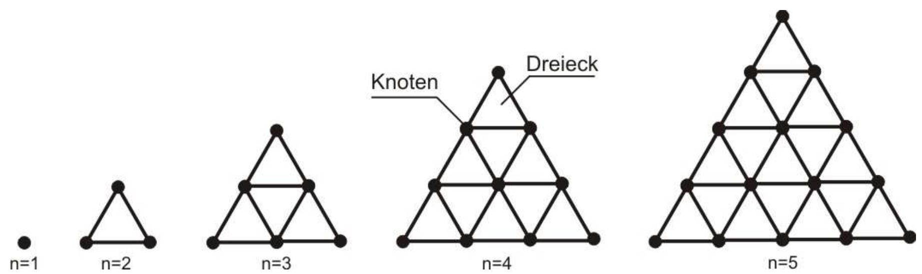


Abbildung 1: Eine Folge von Gittern

**Tutorien:** Montag, den 3.12.2007, bis Mittwoch, den 5.12.2007.

.