Gruppe

Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. F. Hettlich
Dipl.-Math.techn. S. Ritterbusch
Dipl.-Math.techn. A. Schkarbanenko

26	27	28	29	30	Σ

Karlsruhe, den 04.12.2007

Matrikel-Nr.: ....

Matrikel-Nr.: ....

6. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik I für biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe 26: Untersuchen Sie die Folgen, deren Glieder unten für $n \in \mathbb{N}$ angegeben sind, auf Beschränktheit, Monotonie und Konvergenz bzw. Beschränktheit, Monotonie und Konvergenz geeigneter Teilfolgen. Der Grenzwert oder die Häufungspunkte müssen nicht angegeben werden.

(a) $a_n = \dfrac{1+6n+2n^2}{(n+3)n}$,

(b) $b_n = 6 - \dfrac{6+n^2}{n}$,

(c) $c_n = \dfrac{(-2)^{-n}+1}{1+2n} - 1 + \dfrac{2n}{1+2n}$,

(d) $d_n = \dfrac{1+2^n}{1+2^n+(-2)^n}$.

Aufgabe 27: Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_n$ mit

(a) $a_n = \sqrt{n^2+n} - n$, (b) $a_n = \sqrt[n]{4 + \dfrac{n-1}{n+1}}$, (c) $a_n = \dfrac{n^4-2}{n^2+4} + \dfrac{n^3(3-n^2)}{n^3+1}$.

Aufgabe 28: Gegeben sei die rekursiv definierte Folge

$$a_1 = b\,, \qquad a_{k+1} = \frac{|a_k|}{2a_k - 1}\,,\ k \in \mathbb{N}$$

und wir betrachten die zwei Startwerte $b = -\frac{1}{4}$, sowie $b = \frac{1}{4}$.

(a) Unter Annahme der Konvergenz, gegen welche Grenzwerte kann die Folge dann konvergieren?

(b) Für welche der beiden Startwerte ist die Folge monoton?

(c) Für welche der beiden Startwerte ist die Folge beschränkt?

(d) Begründen Sie, ob die Folgen konvergieren und bestimmen Sie ggf. die Grenzwerte.

Aufgabe 29: Numerisch kann die Gleichung

$$x = \frac{x^3}{4} + \frac{1}{5}$$

für $0 \le x \le 1$ durch Iteration gelöst werden. Man verwende hierzu die Folge

$$x_0 = 0, \qquad x_n = \frac{x_{n-1}^3}{4} + \frac{1}{5}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass $(x_n)_n$ konvergiert und schätzen Sie den Fehler nach k Schritten ab.

Hinweis: Bestimmen Sie $C \in \mathbb{R}$ so, dass gilt

$$|x_{n+1} - x_n| \le C\,|x_n - x_{n-1}|.$$

Aufgabe 30: Für $c \in \mathbb{R}$ sei die Folge $(z_n)_n$ definiert durch

$$z_0 = 0\,, \quad z_{n+1} = \frac{n^2 z_n^2 + c}{n+1}\,,\ n \in \mathbb{N}.$$

(a) Stellen Sie für $c = -2$ eine Vermutung für eine geschlossene Form von $(z_n)_n$ ab $n \ge 2$ auf, beweisen Sie diese und die Konvergenz der Folge. Was ist der Grenzwert?

(b) Zeigen Sie, dass die Folge für $c = 1$ monoton wächst, sowie Divergenz durch Vergleich mit $v_n = (4/3)^{n-2}$.

Abgabetermin: Donnerstag, den 13.12.2007, 13:00 Uhr, in den Fächern bei Zimmer 208.1 im Mathematikgebäude.

6. Tutorium
zur Vorlesung Höhere Mathematik I für
biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe T21: Untersuchen Sie die Folgen, deren Glieder im Folgenden beschrieben sind, auf Beschränktheit, Monotonie und Konvergenz (der Grenzwert muss nicht angegeben werden).

$$a_n = \frac{1+n+n^2}{n(n+1)} \quad , \quad b_n = \frac{1+n+n^2}{n+1} \quad ,$$
$$c_n = \frac{1}{1+(-2)^n} \quad , \quad d_n = \frac{1+(-2)^n}{1+2^n} \quad .$$

Aufgabe T22: Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n}\right) \cdot \frac{n^2+3}{n+2}$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{p_n}{n}\right)^n$ für $p_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$,

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{17n^6 + 83n^4}$,

Aufgabe T23: Die Folge $(a_n)_n$ sei rekursiv definiert durch den Startwert a_0 und die Iterationsvorschrift

$$a_{n+1} = \frac{1}{2-a_n}, \qquad n > 0.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Folge für $a_0 < 1$ wohldefiniert ist sowie konvergiert, und berechnen Sie ihren Grenzwert.

(b) Was ergibt sich für $a_0 = 1$, $a_0 = \frac{5}{4}$ bzw. $a_0 = \frac{100}{99}$?

Aufgabe T24: Welche der folgenden Aussagen sind zutreffend?

(a) Eine Folge konvergiert, wenn sie monoton und beschränkt ist.

(b) Wenn eine Folge konvergiert, ist sie monoton und beschränkt.

(c) Wenn eine Folge nicht beschränkt ist, kann sie nicht konvergieren.

(d) Wenn eine Folge nicht monoton ist, kann sie nicht konvergieren.

(e) Wenn eine Folge genau einen Häufungspunkt hat, konvergiert sie.

(f) Wenn eine Folge konvergiert, hat sie genau einen Häufungspunkt.

Tutorien: Montag, den 10.12.2007, bis Mittwoch, den 12.12.2007.