Gruppe

Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. F. Hettlich
Dipl.-Math.techn. S. Ritterbusch
Dipl.-Math.techn. A. Schkarbanenko

31	32	33	34	35	$\sum$

Karlsruhe, den 11.12.2007

Matrikel-Nr.: ....

Matrikel-Nr.: ....

7. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik I für biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe 31: Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folgen mit den Folgengliedern

$$\text{(a)}\quad a_n = \sqrt[n]{2} + \cos(n\pi), \qquad\qquad \text{(b)}\quad b_n = (1-i)\sum_{j=0}^{n-1} i^j,$$

und geben Sie jeweils eine Teilfolge an, die gegen diese Häufungspunkte konvergiert.

Aufgabe 32: Gegeben sei eine rekursiv definierte Folge durch die Vorschrift

$$a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4}, \qquad n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Folge für $0 \leq a_0 \leq \frac{1}{2}$ konvergiert und berechnen Sie ihren Grenzwert.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge für $a_0 > \frac{1}{2}$ divergiert (Hinweis: Zeigen Sie $a_n \geq a_0 + nd$ mit $d = (a_0 - 1/2)^2$).

(c) Was passiert für $a_0 < 0$?

Aufgabe 33: Gegeben sei das Polynom $p(x) = x^4 + 8x^3 + 22x^2 + 24x + 9$.

(a) Entwickeln Sie p um $x_0 = -2$, d.h. finden Sie eine Darstellung der Form $p(x) = \sum_{j=0}^{4} a_j (x+2)^j$.

(b) Zerlegen Sie das Polynom in Linearfaktoren.

(c) Zeigen Sie die Abschätzung: $1 - 2|x+2| \ \leq\ p(x) \ \leq\ (x+1)^4 + (x+1)^2(8 + 4|x|)$ für $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 34: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 2x - x^2, & x \leq 1, \\ 9 - 6x + x^2, & x > 1. \end{cases}$$

Bestimmen Sie möglichst große Intervalle, auf denen die Funktion umkehrbar ist. Geben Sie jeweils die Umkehrfunktion an und skizzieren Sie sie.

Aufgabe 35: Ein Modell zur Bestimmung der Medikamentverteilung von im Körper eines Menschen mit ist das Zweikammer-Modell: Im Wasserhaushalt einer 75 kg schweren Person wird die Konzentration (gemessen in mg/ml) in zwei Flüssigkeitskammern, in der das Medikament sich ansammeln kann, betrachtet: Die Konzentration a_k nach k Stunden im intrazellulären Bereich mit Volumen $V_i = 30000$ ml, und die Konzentration b_k im extrazellulären Bereich mit $V_e = 15000$ ml (u.a. der Blutkreislauf). In einer Stunde diffundieren $7500\,a_k$ mg vom intra- in den extrazellulären Bereich und $7500\,b_k$ mg zurück. Dies ergibt die rekursive Darstellung

$$a_{k+1} = a_k - \frac{7500}{V_i} a_k + \frac{7500}{V_i} b_k\,, \quad b_{k+1} = b_k - \frac{7500}{V_e} b_k + \frac{7500}{V_e} a_k\,.$$

Nach intravenöser Verabreichung nehmen wir $a_0 = 0$ und $b_0 = \frac{1}{5}$ an.

(a) Stellen Sie die Rekursionsgleichung in der Form $(a_{k+1}, b_{k+1})^\top = A \cdot (a_k, b_k)^\top$ mit einer Matrix A dar. Bestimmen Sie die Medikamentmenge m_0 in Gramm zu Beginn und mit Matrix-Vektormultiplikation die Werte a_1, b_1 und damit m_1 nach einer Stunde.

(b) Zeigen Sie die expliziten Darstellungen $a_k = \frac{4^k - 1}{15 \cdot 4^k}$ und $b_k = \frac{4^k + 2}{15 \cdot 4^k}$ für $k \in \mathbb{Z}_{>0}$.

(c) Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen $(a_k)_k$, $(b_k)_k$ und $(m_k)_k$.

Abgabetermin: Donnerstag, den 20.12.2007, 13:00 Uhr, in den Fächern bei Zimmer 208.1 im Mathematikgebäude.

7. Tutorium
zur Vorlesung Höhere Mathematik I für biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe T25: Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folge $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}^2$ mit

$$x_n = \begin{pmatrix} (-1)^n\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right) \\ \dfrac{n+(-1)^n(2n+1)}{n} \end{pmatrix}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe T26: Für $a \in \mathbb{R}$ und $a > 0$ sei die Zahlenfolge (x_n) folgendermaßen rekursiv definiert:

$$x_{n+1} = 2x_n - ax_n^2, \quad n \in \mathbb{Z}_{>0}$$

für $0 < x_0 < \frac{1}{a}$ beliebig.

(a) Zeigen Sie, dass $x_{n+1} \leq \frac{1}{a}$ für alle $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ gilt (Hinweis: quadratische Ergänzung).

(b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion: $x_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. (Hinweis: Teil (a) verwenden.)

(c) Begründen Sie, dass (x_n) konvergiert, und bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Aufgabe T27: Gegeben sei das Polynom $p(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6$.

(a) Bestimmen Sie Zahlen $a_0, \ldots, a_4 \in \mathbb{R}$ mit $p(x) = \sum\limits_{j=0}^{4} a_j\,(x-1)^j$.

(b) Zerlegen Sie p in Linearfaktoren, und bestimmen Sie alle Nullstellen von p.

Aufgabe T28: Gegeben sei $D \subset \mathbb{R}$ und die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ durch die Abbildungsvorschrift

$$\text{(a) } x \mapsto \frac{x^3+x^2-4x-4}{x^2-x-2}, \qquad \text{(b) } x \mapsto \frac{x^3-2x^2+3x-2}{x^2-2x+5}.$$

Geben Sie jeweils den maximalen Definitionsbereich D von f an.

Bestimmen Sie in Teil (a) weiterhin den Wertebereich W von f und stellen Sie fest, ob eine Umkehrfunktion $g : W \to D$ existiert. Geben Sie diese ggf. an.

Selbsttest:

$a_n =$	1	n	$1/n$	$(-1)^n$	$(-1)^n n$	i^n/n	$(-1)^n n+n$	$a_{n-1}/2$, $a_0 = 1$
konstant								
beschränkt								
unbeschränkt								
konvergent								
divergent								
uneigentlich konvergent								
monoton fallend						///		
streng monoton fallend						///		
monoton wachsend						///		
streng monoton wachsend						///		
alternierend						///		
Häufungspunkt(e)								
Grenzwert								

Weisen Sie den Folgen $(a_n)_n$ ihre Eigenschaften zu.
Die Auflösung wird mit den Lösungen des Übungsblattes veröffentlicht.

Tutorien: Montag, den 17.12.2007, bis Mittwoch, den 19.12.2007.