Gruppe

Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. F. Hettlich
Dipl.-Math.techn. S. Ritterbusch
Dipl.-Math.techn. A. Schkarbanenko

36	37	38	39	40	$\sum$

Karlsruhe, den 18.12.2007

Matrikel-Nr.: . . . .

Matrikel-Nr.: . . . .

8. Übungsblatt
zur Vorlesung Höhere Mathematik I für
biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe 36: Zeigen Sie: Die Gleichung

$$\frac{(a+b)x+a-b}{x^2-1}+\frac{c}{x-2}=1$$

besitzt stets eine Lösung im Intervall $[-1,1]$ und im Intervall $[1,2]$ für beliebige positive Zahlen a,b,c.

Aufgabe 37: Zeigen Sie, dass folgende Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ lipschitz-stetig sind und berechnen Sie jeweils eine Lipschitz-Konstante.

(a) $f(x) = \sqrt{2+3x},\ D = [0,3)$,

(b) $f(x) = x^2 + 4x - 1,\ D = (-3,2)$,

(c) $f(x) = \sqrt{x^2+1},\ D = [-4,1]$.

Aufgabe 38: Betrachten Sie die stückweise definierte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 12 & x < -1 \\ p(x) & -1 \le x < 2 \\ 1-2x & x \ge 2\,, \end{cases}$$

mit einem Polynom p.

(a) Bestimmen Sie ein Polynom p kleinsten Grades, sodass f stetig ist. Ist es eindeutig?

(b) Kann es ein eindeutig bestimmtes Polynom p kleinsten Grades geben, sodass f stetig ist und zusätzlich $f(1) = -2$ gilt? Erklären Sie, warum nicht, oder bestimmen Sie es, falls doch.

Aufgabe 39: Zeigen Sie, dass es zu jeder Zeit zwei gegenüberliegende Punkte auf dem Erdäquator gibt, an denen die gleiche Temperatur herrscht.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass die Temperatur $t : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ auf dem Äquator eine stetige Funktion ist. Stellen sie eine Funktion für die Temperaturdifferenz gegenüberliegender Punkte auf und überlegen Sie, ob Sie darauf den Zwischenwertsatz anwenden können.

Aufgabe 40: „Schon wieder Weihnacht...“, denkt sich Lucifer, dem die Freude und Liebe der Feiertage sehr auf den Pferdefuß geht. Aus Rache will er aus allen unseren Reihen alle Summanden mit Zahlen mit Heiligenschein (das sind für ihn alle Zahlen mit Nullen) streichen und hofft damit die Welt unbemerkt in Inharmonie und Chaos stürzen zu können. Doch vielleicht können Sie seine Teufelei mit der nun in-harmonischen Reihe schnell enttarnen, wäre sie denn dann noch divergent?

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+\frac{1}{17}+\frac{1}{18}+\frac{1}{19}+\frac{1}{21}+\ldots$$

Hinweis: Wie viele Kehrwerte j-stelliger Zahlen bleiben jeweils erhalten?

Abgabetermin: Donnerstag, den 10.1.2008, 13:00 Uhr, in den Fächern bei Zimmer 208.1 im Mathematikgebäude.

8. Tutorium
zur Vorlesung Höhere Mathematik I für biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe T29: Auf $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ sei die Funktion f durch

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{12x-9}{x^2-2x} & 1 < |x| < 3,\ x \neq 2 \\ p(x) & \text{sonst} \end{cases}$$

erklärt, wobei p ein Polynom ist. Das Polynom p soll so bestimmt werden, dass f stetig ist. Machen Sie einen Ansatz für p, und begründen Sie, dass dieser Ansatz zu einer eindeutigen Lösung führt. Bestimmen Sie anschließend das Polynom.

Aufgabe T30: Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ lipschitz-stetig sind und berechnen Sie jeweils eine Lipschitz-Konstante.

(a) $f(x) = 2x + 5,\ D = \mathbb{R}$,

(b) $f(x) = 3x^2 + 4,\ D = [-1, 5]$,

(c) $f(x) = \sqrt{1-x},\ D = (-4, \frac{1}{2})$.

Aufgabe T31: Zeigen Sie, dass die Graphen der Funktionen

$$f_1(x) = \sqrt{x} \quad \text{und} \quad f_2(x) = (x^2-1)^2$$

auf ihrem gemeinsamen Definitionsbereich $\mathbb{R}_{\geq 0}$ mindestens zwei Schnittpunkte haben.

Aufgabe T32: Konvergieren die folgenden Reihen?

$$\text{(a)} \quad \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sqrt{k} - \sqrt{k+1} \right) \right) \qquad\qquad \text{(b)} \quad \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4k}{(k^2-1)^2} \right).$$

Hinweis: Bestimmen Sie jeweils eine allgemeine Darstellung für die n-te Partialsumme s_n.

Wir wünschen Ihnen erholsame Feiertage und einen guten Start ins neue Jahr!

Frank Hettlich
Andreas Schkarbanenko
Sebastian Ritterbusch

Tutorien: Montag, den 7.1.2008, bis Mittwoch, den 9.1.2008.