Gruppe

Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. F. Hettlich
Dipl.-Math.techn. S. Ritterbusch
Dipl.-Math.techn. A. Schkarbanenko

41	42	43	44	45	$\sum$

Karlsruhe, den 7.01.2008

Matrikel-Nr.: ....

Matrikel-Nr.: ....

9. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik I für biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe 41: Prüfen Sie jeweils mit dem Quotienten-, Wurzel- und dem Majoranten-/Minorantenkriterium nach, ob die folgenden Reihen konvergieren oder divergieren.

$$\text{(a)} \quad \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}\right), \qquad \text{(b)} \quad \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}\right), \qquad \text{(c)} \quad \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2k+1}\right).$$

Aufgabe 42: Geben Sie zu den Reihen

$$\text{(a)} \quad \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{2+3i}\right)^k\right), \qquad \text{(b)} \quad \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(2\sqrt{k} - 4\sqrt{k+1} + 2\sqrt{k+2}\right)\right), \qquad \text{(c)} \quad \left(\sum_{k=3}^{\infty} \frac{8k}{(k^2-1)^2}\right)$$

eine allgemeine Darstellung für die jeweils n-te Partialsumme s_n an und untersuchen Sie die Reihen auf Konvergenz oder Divergenz.

Aufgabe 43: Zeigen Sie, dass die Reihe $\left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k+1}{2^k}\right)$ absolut konvergiert. Beweisen Sie anschließend für die Partialsummen s_n der Reihe durch vollständige Induktion die Darstellung

$$s_n = \frac{1}{9}\left(4 + (-1)^n \frac{3n+5}{2^n}\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

und nutzen Sie dieses Resultat zur Gewinnung des Grenzwerts s der Reihe.

Aufgabe 44: Untersuchen Sie die Reihe $\left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n\right)$ auf Konvergenz und absolute Konvergenz, wenn

$$\text{(a)} \ a_n = \frac{n}{2^n}, \qquad \text{(b)} \ a_n = \frac{\sqrt{n + \frac{1}{n}}}{n}.$$

Geben Sie im Konvergenzfall einen Index N an, so daß die Partialsummen s_n, $n \geq N$, um höchstens 10^{-2} vom Grenzwert abweichen.

Aufgabe 45:

(a) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\left(\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k}{k^2-1}\right)$$

konvergiert, aber nicht absolut konvergiert.

(b) Bestimmen Sie eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ so, dass jede Partialsumme

$$s_n = \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k+1} \frac{k}{k^2-1},$$

um höchstens $\frac{1}{10}$ vom Grenzwert der Reihe abweicht, falls $n \geq N$ ist.

Abgabetermin: Donnerstag, den 17.01.2008, 13:00 Uhr, in den Fächern bei Zimmer 208.1 im Mathematikgebäude.

9. Tutorium
zur Vorlesung Höhere Mathematik I für
biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe T33: Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvegrenz.

(a) $\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3+4i}{6}\right)^n\right)$, (c) $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}\right)$,

(b) $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2(n+1)^2}{n!}\right)$, (d) $\left(\sum_{n=8}^{\infty}\frac{n+7\sqrt{n}}{n^3-n}\right)$.

Aufgabe T34: Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

(a) $\left(\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{k}{k^2+2k+1}\right)$ (b) $\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^k}{k+3}-\frac{\cos(k\pi)}{k+2}\right]\right)$.

Bestimmen Sie für die Reihe in (a) eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ so, dass jede Partialsumme s_n um höchstens $\frac{1}{8}$ vom Grenzwert der Reihe abweicht, falls $n \geq N$ ist.

Aufgabe T35: Zeigen Sie, daß die Reihe $\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4(k+1)}{k^2(k+2)^2}\right)$ konvergiert. Bestimmen Sie ferner zwei Zahlen c_1, c_2 so, daß $\frac{4(k+1)}{k^2(k+2)^2}=\frac{c_1}{k^2}+\frac{c_2}{(k+2)^2}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Berechnen Sie damit den Grenzwert der Reihe.

Aufgabe T36: Gegeben sei die Reihe $\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\right)$ mit

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{-1}{2^n} & \text{für } n \text{ gerade} \\ \dfrac{1}{4^n} & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie mit dem Majorantenkriterium die absolute Konvergenz der Reihe.

(b) Zeigen Sie: Das Wurzelkriterium liefert auch die absolute Konvergenz der Reihe; mit dem Quotientenkriterium ist keine Aussage möglich.

(c) Schreiben Sie die Reihe als Summe von zwei geeigneten Reihen und berechnen Sie damit ihren Wert.

Tutorien: Montag, den 14.01.2008, bis Mittwoch, den 16.01.2008.