Höhere Mathematik I

15.11.07.

3. Übung

Fortsetzung der Aufgabe 1c).

Gesucht ist die Schnittmenge $G \cap E$, wobei

$$E: x(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

$$G: x(\lambda) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ansatz: Wir suchen nach α, β, λ, die folgende Glg. erfüllen:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Koeffizientenmatrix ist:

$$\begin{array}{ccc|c} \alpha & \beta & \lambda & \\ \boxed{-1} & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & 3 \end{array} \quad (2) \; (-2) \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{ccc|c} \alpha & \beta & \lambda & \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 1 & 1 \end{array}$$

2. Glg. $\Rightarrow \beta = -2$

3. Glg. $\Rightarrow \lambda = -7$

1. Glg $\Rightarrow \alpha = 4$.

Für Schnittmenge erhalten wir also einen einzigen Pkt. $(4,-2,-7)^T$.

Fortsetzung der Aufgabe 3.

Fall $\alpha = -2$: Die Koeffizientenmatrix ist:

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0. \end{array}$$

Somit sind zwei der drei Variablen x_1, x_2, x_3 unabhängig! Wir wählen $x_2 = r$, $x_3 = s$, $r, s \in \mathbb{R}$.

Dann ist $x_1 = 5 - 2r - s$. M_{-2} ist also eine Ebene!

Wir geben diese in Parameterform an:

$$M_{-2}: x(r,s) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r, s \in \mathbb{R}.$$