Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. T. Arens
Dipl.-Math. S. Heumann
Dipl.-Math.techn. A. Schkarbanenko

46	47	48	49	50	$\sum$

Gruppe

Karlsruhe, den 12.1.2010

Matrikel-Nr.: ....

Matrikel-Nr.: ....

10. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik I für biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe 46: Gegeben seien die Potenzreihen

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!}, \qquad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k .$$

Bestimmen Sie die Bereiche, in denen Sie durch Ableiten der Potenzreihen die Ableitungen der Funktionen bestimmen können und berechnen Sie diese.

Aufgabe 47: Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^5$, $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) $f(x)$ besitzt eine Umkehrfunktion $g(x)$ (Skizze!).

(b) $g(x)$ ist differenzierbar für $x \neq 0$, aber nicht für $x = 0$.

(c) Geben Sie die Ableitung $g'(x)$ für $x \neq 0$ an.

Aufgabe 48: Geben Sie die für (a) und (b) Definitionsmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ und berechnen Sie die Ableitung der folgenden reellwertigen Funktionen:

(a) $f(x) = e^x \cdot \cos^2(x) \cdot (\cos x + 3 \sin x)$,

(b) $f(x) = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$,

(c) $f(x) = a^{(x^x)}, \quad a > 0, x \in \mathbb{R}_{>0}$,

(d) $f(x) = x^{(a^x)}, \quad a > 0, x \in \mathbb{R}_{>0}$.

Aufgabe 49: Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^x & x \leq 0 \\ \cos(x) + x & 0 < x \end{cases} .$$

(a) Zeigen Sie: f ist in $x \neq 0$ beliebig oft differenzierbar.

(b) Zeigen Sie: f ist in $x = 0$ einmal stetig differenzierbar.

(c) Ist f in $x = 0$ zweimal stetig differenzierbar?

Aufgabe 50: Die Umkehrfunktion des Tangens ist die Funktion

$$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

(a) Berechnen Sie die Ableitung von arctan mit der Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion.

(b) Für $|x| < 1$ kann arctan in eine Potenzreihe entwickelt werden:

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Berechnen Sie $(\arctan x)'$ nun, indem Sie diese Potenzreihe differenzieren.

Abgabetermin: Donnerstag, den 21.01.2010, 12:00 Uhr, in den Abgabekästen bei Seminarraum 1C-03 im ersten Stock des Gebäudeteils C im Allianzgebäude (05.20).

10. Tutorium
zur Vorlesung Höhere Mathematik I für
biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe T37: Weisen Sie folgende Behauptung nach: Die in $[0, \infty)$ erklärte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x & , \quad x \in [0,1] \quad , \\ 2x - 1 & , \quad x \in (1, \infty) \quad , \end{cases}$$

(a) ist stetig für $0 \leq x < \infty$,

(b) differenzierbar für $0 < x < 1$ und $1 < x < \infty$ und

(c) nicht differenzierbar an der Stelle $x = 1$.

Aufgabe T38: Geben Sie die Definitionsmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ an und berechnen Sie die Ableitung der folgenden reellwertigen Funktionen:

(a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$,

(b) $f(x) = \dfrac{\cos^2 x}{1 + \cot x} + \dfrac{\sin^2 x}{1 + \tan x}$,

(c) $f(x) = (\sqrt{x} + 1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \right)$,

(d) $f(x) = \cos^2 x \cdot \cos(x^2)$.

Aufgabe T39: Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right), \qquad x > 1.$$

(a) Berechnen Sie die Ableitung von f.

(b) Für f gilt auch die Reihendarstellung

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)\, x^{2k+1}}.$$

Benutzen Sie diese Darstellung, um die Ableitung von f zu berechnen.

Aufgabe T40:

(a) Bestimmen Sie das Intervall $I \subset \mathbb{R}$, in dem die Funktion $f(x) = \cosh x$ streng monoton wächst und somit invertierbar ist.

(b) Benutzen Sie die Darstellung von $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, um die Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \operatorname{Arcosh}(x)$ und deren Ableitung $(f^{-1})'(x)$ zu berechnen.

Tutorien: Freitag, den 15.01.2010, bis Dienstag, den 19.01.2010.