Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. T. Arens
Dipl.-Math. S. Heumann
Dipl.-Math.techn. A. Schkarbanenko

51	52	53	54	55	$\sum$

Gruppe

Karlsruhe, den 19.01.2010

Matrikel-Nr.: ....

Matrikel-Nr.: ....

11. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik I für biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe 51: Benutzen Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung:

(a) Beweisen Sie die Ungleichung

$$\ln(1+x) \le \frac{x}{\sqrt{1+x}} \qquad \text{für } x > 0\,.$$

Hinweis: Betrachten Sie $f(t) = \ln(1+t) - \frac{t}{\sqrt{1+t}}$ im Intervall $[0, x]$.

(b) Zeigen Sie die Einschließung

$$1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1, \quad x \in (1, \infty).$$

Wie lässt sich hiermit die reelle Zahl $a = 2\ln 3 - 3\ln 2$ einschließen?
Hinweis: Betrachten Sie $f(t) = \ln t$ für $t \in (1, x)$.

(c) Zeigen Sie die Lipschitz-Stetigkeit der Funktion

$$f(x) = \sqrt{1+x}\,, \qquad 0 \le x < 3\,,$$

und berechnen Sie eine Lipschitzkonstante.

Aufgabe 52: Bestimmen Sie die Grenzwerte

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x + 3x - 1}{2x}$, (b) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^a - a^x}{a^x - a^a}$, $a > 0, a \neq 1$, (c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2\ln x}{x^b}$, $b > 0$, (d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(\ln x)}{\ln x}$.

Aufgabe 53: Gegeben ist $f(x) = \sqrt[3]{2x+2}\,,\ x \ge -1\,.$

(a) Stellen Sie das Taylorpolynom 2. Grades von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 3$ auf.

(b) Schätzen Sie das Lagrange-Restglied zum Taylorpolynom 2. Grades für $x \in [-\frac{1}{2}, 3]$ unabhängig von x ab.

Aufgabe 54: Die Funktion $f\colon [-1,2) \cup (2,3] \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x - 2}.$$

Zeigen Sie, dass $f(x) \le 0$ für alle $x \in [-1,2) \cup (2,3]$ gilt.

Aufgabe 55: Die S-Bahn S3 darf auf der Strecke Karlsruhe-Bruchsal maximal 160 km/h fahren. Der Stromverbrauch für den Betrieb der S3 ist proportional zum Quadrat ihrer Geschwindigkeit. Bei einer Geschwindigkeit von 50 km/h betragen die Stromkosten der Lokomotive 100 EUR pro Stunde. Außerdem entstehen feste Kosten in Höhe von 400 EUR pro Stunde (Personalkosten, Wartungskosten etc.).

(a) Bei welcher Geschwindigkeit sind die Betriebskosten pro gefahrenem Kilometer am geringsten?

(b) Im Tagesmittel betragen die Einnahmen 14 EUR pro gefahrenem Kilometer. Wie schnell sollte die S-Bahn fahren, damit der Gesamtgewinn (also die Differenz zwischen Einnahmen und Kosten) pro Stunde möglichst groß wird?

Abgabetermin: Donnerstag, den 28.01.2010, 12:00 Uhr, in den Abgabekästen bei Seminarraum 1C-03 im ersten Stock des Gebäudeteils C im Allianzgebäude (05.20).

11. Tutorium
zur Vorlesung Höhere Mathematik I für
biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe T41: Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung

(a) die Ungleichung

$$|\cos e^x - \cos e^y| \le |x-y|$$

für $x, y \le 0$,

(b) die Lipschitz-Stetigkeit der Funktion $f(x) = \sin x$ für $x \in \mathbb{R}$,

(c) den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n^2+k^2} - \sqrt[3]{n^2}) = 0.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $x \mapsto \sqrt[3]{x}$.

Aufgabe T42: Bestimmen Sie die angegebenen Grenzwerte. Begründen Sie, warum Sie die Regel von de l'Hospital in Teil (c) nicht anwenden dürfen.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 e^x}{(e^x-1)^2}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$

Aufgabe T43: Berechnen Sie alle Ableitungen $f^{(n)}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ der Funktion f und geben Sie damit die Taylorreihe für f an mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Zu Teil (a): Wo konvergiert die Reihe?

(a) $f(x) = \cosh \dfrac{x}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$, (b) $f(x) = \sqrt{1+x}, \quad |x| \le 1$.

Hinweis zu (b): Die Ableitungen von f haben die folgende Form: $f^{(k)}(x) = -(-1)^k \frac{(2k-2)!}{2^{2k-1}\,(k-1)!} (1+x)^{-\frac{2k-1}{2}}$.

Aufgabe T44: Zeigen Sie für $x \in [-1, 1]$

$$-1 + x - \frac{x^2-1}{x^2+1} \le \arctan(x) \le 1 + x + \frac{x^2-1}{x^2+1}\,.$$

Hinweis: Untersuchen Sie Extrema der Differenzen der Terme.

Tutorien: Freitag, den 22.01.2010, bis Dienstag, den 26.01.2010.