

6	7	8	9	10	Σ

Gruppe

Karlsruhe, den 3.11.2009

Matrikel-Nr.:

Matrikel-Nr.:

2. Übungsblatt

zur Vorlesung Höhere Mathematik I für biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe 6: Beweisen Sie durch vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N}$:

$$(a) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}, \quad (b) \sum_{k=1}^n \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{n}{3n+1}.$$

Aufgabe 7: Zeigen Sie mit vollständiger Induktion für $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$:

$$\sum_{k=0}^{2n} i^k k = \begin{cases} n(1-i), & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ -(n+1) + ni, & \text{wenn } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Aufgabe 8: Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 - 3i$, $z_3 = \sqrt{3} + i$. Berechnen Sie

- (a) Real- und Imaginärteil der komplexen Zahlen \bar{z}_j , $-z_j$, $z_j \bar{z}_j$, $\frac{1}{z_j}$, $z_j - \bar{z}_j$ und $|z_j|$, jeweils für $j = 1, 2$, sowie der Zahlen

$$\frac{z_1}{z_1 + z_2}, \quad \text{und} \quad z_1^3 z_2^2.$$

- (b) die Polarkoordinatendarstellung (r, φ) von z_3 , wobei φ dem Hauptwert des Arguments von z_3 entspricht.

Aufgabe 9: Skizzieren Sie die Menge aller komplexen Zahlen z , die der jeweiligen Bedingung genügen:

- (a) $|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \leq 4$,
 (b) $|z|^2 \leq 2 \operatorname{Re} z$,
 (c) $z^4 + (2i + 2)z^2 + 4i = 0$.

Aufgabe 10: Berechnen Sie Real- und Imaginärteil der Zahl $z = (1 + i)^5$

- (a) mit Hilfe der binomischen Formel,
 (b) unter Verwendung der Polardarstellung von $1 + i$.
 (c) Nach welcher der in (a) bzw. (b) genannten Methode sollte man also $w = (1 - i)^{17}$ berechnen? Bestimmen Sie $\operatorname{Re} w$ und $\operatorname{Im} w$.

2. Tutorium
zur Vorlesung Höhere Mathematik I für
biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe T5: Zeigen Sie durch vollständige Induktion

$$(a) \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{n}{2}, \quad (b) \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}, \quad n \geq 1.$$

Aufgabe T6:

(a) Für die komplexen Zahlen

i) $z = 3 - i$

ii) $z = 3 + 4i$

zerlege man die Zahlen \bar{z} , $-z$, $z\bar{z}$, $\frac{1}{z}$, $z - \bar{z}$, $|z|$ in Real- und Imaginärteil und veranschauliche die Ergebnisse in der komplexen Ebene.

(b) Berechnen Sie die Polarkoordinaten $(r, \text{Arg } z)$ folgender Zahlen

i) $-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{3}i$, ii) $-1 - i$.

Aufgabe T7: Skizzieren Sie die Menge aller komplexen Zahlen z , die der jeweiligen Bedingung genügen:

(a) $|3z - 1 + 2i| \leq 2$,

(b) $|z - z_0| = |z - z_1|$ für $z_0 = 1 - i$, $z_1 = 2 + i$.

Aufgabe T8: Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil aller Lösungen $w \in \mathbb{C}$ der Gleichung

(a) $w^2 = -5 + 12i$, (b) $w^2 + 6iw - 6 = 4i$.

Alle aktuellen Informationen zur Veranstaltung finden Sie auf der Internetseite unter:
<http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/iag1/lehre/hm1mach2009w/de>

Tutorien: Freitag, den 6.11.2009, bis Dienstag, den 10.11.2009.