Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. T. Arens
Dipl.-Math. S. Heumann
Dipl.-Math.techn. A. Schkarbanenko

11	12	13	14	15	$\sum$

Gruppe

Karlsruhe, den 10.11.2009

Matrikel-Nr.: ....

Matrikel-Nr.: ....

3. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik I für biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe 11: Gegeben sei die Folge $(a_n)_n$ mit den Gliedern

$$a_n = \frac{n(n+3)-4}{n^2-1}\,, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Untersuchen Sie die Konvergenz, indem Sie einen Folgenindex N derart bestimmen, dass $|a_n - 1| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$, wenn

$$\text{(i) } \varepsilon = \frac{1}{10}\,, \qquad \text{(ii) } \varepsilon = \frac{1}{100}\,, \qquad \text{(iii) } \varepsilon > 0 \text{ beliebig ist.}$$

Ist die Folge $(a_n)_n$ konvergent, und wenn ja, welchen Grenzwert hat sie?

Aufgabe 12: Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_n$ mit

(a) $a_n = \sqrt[n]{4 + \dfrac{n-1}{n+1}}$, (b) $a_n = \dfrac{n^4-2}{n^2+4} + \dfrac{n^3(3-n^2)}{n^3+1}$, (c) $a_n = \sqrt[n]{34^n + 118^n} \cdot \left[\dfrac{(n+4)^4}{n^3} - n + 1\right] + 3\,.$

Aufgabe 13: Untersuchen Sie die Folgen mit den Gliedern

(a) $a_n = \sqrt{q^n + n} - \sqrt{n}$ mit festem $q > 0$, (b) $b_n = \dfrac{2}{n+1} \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{2}{k}\right) - \sqrt{n^2+1}\,,$

auf ihr Konvergenzverhalten, d.h. auf Konvergenz und Divergenz. Geben Sie evtl. vorhandene Grenzwerte an.
Hinweis zu Teil (b): Beweisen Sie induktiv, dass für $p_n := \frac{2}{n+1} \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{2}{k}\right)$ gilt: $p_n = n + 2$.

Aufgabe 14: Bestimmen Sie die Grenzwerte der komplexen Folgen mit den Gliedern

(a) $a_n = 2 + \dfrac{4i^n}{n} + \left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}i\right)^n$, (b) $b_n = \dfrac{n^3 + (in^2+1)(6+in)}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} ik^2}$

Aufgabe 15: Die Folge $(a_n)_n$ sei rekursiv definiert durch

$$a_0 = 0\,, \quad a_1 = 1\,, \quad a_{n+1} := \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1})\,, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Außerdem sei für $n \in \mathbb{N}$ die Folge $(c_n)_n$ definiert durch $c_n := a_n - a_{n-1}$.

(a) Geben Sie c_n explizit an.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_{2n} < a_{2n+1}$.

(c) Drücken Sie a_n durch $c_1, c_2, \ldots$ aus und zeigen Sie: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3}$.

Abgabetermin: Donnerstag, den 19.11.2009, 12:00 Uhr, in den Abgabekästen bei Seminarraum 1C-03 im ersten Stock des Gebäudeteils C im Allianzgebäude (05.20).

3. Tutorium
zur Vorlesung Höhere Mathematik I für biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe T9: Gegeben sei die Folge $(a_n)_n$ mit den Gliedern $a_n = \frac{n-1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie einen Folgenindex N derart, daß $|a_n - 1| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$, wenn

(a) $\varepsilon = \dfrac{1}{10}$, (b) $\varepsilon = \dfrac{1}{1000}$, (c) $\varepsilon > 0$ beliebig ist.

Konvergiert die Folge $(a_n)_n$? Falls ja, was ist ihr Grenzwert?

Aufgabe T10: Berechnen Sie unter Verwendung der Limesregeln die Grenzwerte der Folgen mit den Gliedern

(a) $a_n = \dfrac{1+n+n^2}{n(n+1)}$,

(b) $b_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}\,, \qquad 0 \leq a \leq b\,,$

(c) $c_n = \sqrt{n^2 + an + b} - n\,, \qquad a, b \in \mathbb{R}, n$ hinreichend groß,

(d) $d_n = \left(\sqrt{n^2+1} - n\right)(n+7)\,.$

Aufgabe T11: Berechnen Sie die Grenzwerte der komplexen Folgen, die explizit definiert sind durch:

(a) $a_n = \dfrac{2+i^n}{4+n}$, $n \in \mathbb{N}$, (b) $b_n = \dfrac{(5n+i)(ni+3)}{(1+i)^n}$, $n \in \mathbb{N}$, (c) $c_n = \dfrac{2(-6)^n i^n + 2^n}{5(-6)^{n+1} i^n + 3^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe T12: Gegeben sei die reelle Folge $(a_n)_n$ mit den Folgengliedern

$$a_n = \frac{1}{2} + (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Ist die Folge beschränkt? Falls ja, geben Sie das kleinstmögliche r an mit $|a_n| \leq r$. Begründen Sie Ihre Antwort.

Tutorien: Freitag, den 13.11.2009, bis Dienstag, den 17.11.2009.