Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. T. Arens
Dipl.-Math. S. Heumann
Dipl.-Math.techn. A. Schkarbanenko

16	17	18	19	20	$\sum$

Gruppe

Karlsruhe, den 17.11.2009

Matrikel-Nr.: ....

Matrikel-Nr.: ....

4. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik I für biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe 16: Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der (komplexen) Folgen mit den Gliedern

(a) $a_n = \dfrac{1}{n} + 2(-1)^n$ (b) $b_n = \left(\dfrac{5n+7}{n}\right) i^n$

Aufgabe 17: Untersuchen Sie die Folgen, deren Glieder unten für $n \in \mathbb{N}$ angegeben sind, auf Beschränktheit, Monotonie und Konvergenz bzw. Beschränktheit, Monotonie und Konvergenz geeigneter Teilfolgen. Der Grenzwert oder die Häufungspunkte müssen nicht angegeben werden.

(a) $a_n = \dfrac{1+6n+2n^2}{(n+3)n}$, (c) $c_n = \dfrac{(-2)^{-n}+1}{1+2n} - 1 + \dfrac{2n}{1+2n}$,

(b) $b_n = 6 - \dfrac{6+n^2}{n}$, (d) $d_n = \dfrac{1+2^n}{1+2^n+(-2)^n}$.

Aufgabe 18: Für $a \in \mathbb{R}_{>0}$ sei die Zahlenfolge $(x_n)_n$ folgendermaßen rekursiv definiert

$$x_{n+1} = 2x_n - ax_n^2, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

für $0 < x_0 < \frac{1}{a}$ beliebig.

(a) Zeigen Sie, dass $x_{n+1} \leq \frac{1}{a}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. (Hinweis: quadratische Ergänzung).

(b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion: $x_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. (Hinweis: Teil (a) verwenden.)

(c) Begründen Sie, dass $(x_n)_n$ konvergiert, und bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Aufgabe 19: Gegeben sei die rekursiv definierte Folge

$$a_1 = b\,, \qquad a_{k+1} = \frac{|a_k|}{2a_k - 1}\,,\ k \in \mathbb{N}$$

und wir betrachten die zwei Startwerte $b = -\frac{1}{4}$, sowie $b = \frac{1}{4}$.

(a) Unter Annahme der Konvergenz, gegen welche Grenzwerte kann die Folge dann konvergieren?

(b) Für welche der beiden Startwerte ist die Folge monoton?

(c) Für welche der beiden Startwerte ist die Folge beschränkt?

(d) Begründen Sie, ob die Folgen konvergieren und bestimmen Sie ggf. die Grenzwerte.

Aufgabe 20: Ein Student lernt pro Tag drei HM1-Skriptseiten auswendig. Über die Nacht vergisst er 4% des insgesamt gelerntes Wissens. Gehen Sie davon aus, dass Skript unendlich viele Seiten hat und die Testperson am ersten Semestertag über kein HM-Wissen verfügte. Also nicht mal die *pq*-Formel!

(a) Geben Sie eine (rekursive) Formel für den Wissensinhalt w_n (gemessen in Seiten) der Testperson nach Ablauf von n Tagen und n Nächten.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge $(w_n)_n$ monoton steigt.

(c) Zeigen Sie, dass $(w_n)_n$ durch 75 Seiten nach oben beschränkt ist.

(d) Welche Wissensmenge wird sich nach einiger Zeit etwa eingestellt haben?

Abgabetermin: Donnerstag, den 26.11.2009, 12:00 Uhr, in den Abgabekästen bei Seminarraum 1C-03 im ersten Stock des Gebäudeteils C im Allianzgebäude (05.20).

4. Tutorium
zur Vorlesung Höhere Mathematik I für
biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe T13: Welche der folgenden Aussagen sind zutreffend?

(a) Eine Folge konvergiert, wenn sie monoton und beschränkt ist.

(b) Wenn eine Folge konvergiert, ist sie monoton und beschränkt.

(c) Wenn eine Folge nicht beschränkt ist, kann sie nicht konvergieren.

(d) Wenn eine Folge nicht monoton ist, kann sie nicht konvergieren.

(e) Wenn eine Folge genau einen Häufungspunkt hat, konvergiert sie.

(f) Wenn eine Folge konvergiert, hat sie genau einen Häufungspunkt.

Aufgabe T14: Untersuchen Sie die Folgen, deren Glieder im Folgenden beschrieben sind, auf Beschränktheit, Monotonie und Konvergenz (der Grenzwert muss nicht angegeben werden).

$$(a) \quad a_n = \frac{1+n+n^2}{n(n+1)} \quad , \quad (b) \quad b_n = \frac{1+n+n^2}{n+1} \quad ,$$
$$(c) \quad c_n = \frac{1}{1+(-2)^n} \quad , \quad (d) \quad d_n = \frac{1+(-2)^n}{1+2^n} \quad .$$

Aufgabe T15: Die reelle Folge (a_k) sei definiert durch

$$a_1 = 1, \quad a_{k+1} = \frac{a_k}{1+\sqrt{1+a_k^2}}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

(a) Zeigen Sie, dass die Folge konvergiert und berechnen Sie ihren Grenzwert.

(b) Zeigen Sie, dass auch die Folge (b_k) mit $b_k = 2^k a_k$, $k = 1, 2, \ldots$ konvergiert.

Aufgabe T16: Gegeben sei eine rekursiv definierte Folge durch die Vorschrift

$$a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4}, \qquad n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Folge für $0 \leq a_0 \leq \frac{1}{2}$ konvergiert und berechnen Sie ihren Grenzwert.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge für $a_0 > \frac{1}{2}$ divergiert (Hinweis: Zeigen Sie $a_n \geq a_0 + nd$ mit $d = (a_0 - 1/2)^2$).

(c) Was passiert für $a_0 < 0$?

Tutorien: Freitag, den 20.11.2009, bis Dienstag, den 24.11.2009.