

21	22	23	24	25	Σ

Gruppe

Karlsruhe, den 24.11.2009

Matrikel-Nr.:

Matrikel-Nr.:

5. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik I für biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe 21: Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge D und das Bild $f(D)$ der reellwertigen Funktion f , gegeben durch

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - 7x + 6}.$$

Aufgabe 22: Gegeben sei das Polynom $f(x) = x^4 + 5x^3 - 8x^2 + 1 - (x - 2)^3$.

- Entwickeln Sie f jeweils um die Entwicklungspunkte $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$.
- Stellen Sie das Polynom als Produkt von Linearfaktoren dar. Was schließen Sie für das Verhalten von f auf den Intervallen $[1, \infty)$ und $(-\infty, -3]$?
- Skizzieren Sie die Umkehrfunktionen von f auf $[1, \infty)$ und $(-\infty, -3]$ und geben Sie deren Bild und Definitionsmenge D an.

Aufgabe 23: Bestimmen Sie die Definitionsmenge D , das Bild $f(D)$ und die Umkehrfunktion f^{-1} von

$$f : \begin{cases} D \longrightarrow \mathbb{R}, \\ x \mapsto 1 - \frac{1}{x} \end{cases}.$$

Fertigen Sie eine Skizze von f und f^{-1} an.

Aufgabe 24: Gegeben sei die Menge $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ und die Funktionen $h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{1+z}$ und $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto -z$.

- Was ist die geometrische Bedeutung der Abbildung g ?
- Zeigen Sie, dass K durch h auf den Kreis mit Mittelpunkt $-1/3$ und Radius $2/3$ abgebildet wird.
- Bestimmen Sie das Bild des Kreises mit Mittelpunkt $-\frac{3}{2} + \frac{i}{2}$ und Radius 2 unter der Abbildung

$$f : \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{-5/2 + i/2\} \longrightarrow \mathbb{C}, \\ z \mapsto \frac{-2}{2z + 5 - i} \end{cases}.$$

Fertigen sie eine Skizze von Bild und Urbild an.

Aufgabe 25: Sei $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten $a_k, k = 0, \dots, n-1$ und $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

- Ist $p(z) = 0$, dann auch $p(\bar{z}) = 0$.
- Das Produkt aller Nullstellen von p ist reell.
- Die Summe aller Nullstellen von p ist reell.

5. Tutorium zur Vorlesung Höhere Mathematik I für biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe T17: Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x) = \frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{8}x^2 - \frac{9}{8}x + \frac{5}{8}$.

- (a) Entwickeln Sie f jeweils um die Entwicklungspunkte $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$. Was schließen Sie für das Verhalten von f auf den Intervallen $[-5, \infty)$ und $(-\infty, 3]$?
- (b) Finden Sie anhand einer Skizze von f Intervalle, auf denen f eine Umkehrfunktion besitzt. Fertigen Sie auch Skizzen der Umkehrfunktion an.

Aufgabe T18: Gegeben sei $D \subset \mathbb{R}$ und die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ durch die Abbildungsvorschrift

$$(a) \quad x \mapsto \frac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 2}, \quad (b) \quad x \mapsto \frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 2x + 5}.$$

Geben Sie jeweils die maximale Definitionsmenge D von f an, bestimmen Sie in Teil (a) das Bild $f(D)$ von f und stellen Sie fest, ob eine Umkehrfunktion $g : f(D) \rightarrow D$ existiert. Geben Sie diese gegebenenfalls an.

Aufgabe T19: Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 2x - x^2, & x \leq 1, \\ 9 - 6x + x^2, & x > 1. \end{cases}$$

Bestimmen Sie möglichst große Intervalle, auf denen die Funktion umkehrbar ist. Geben Sie jeweils die Umkehrfunktion an und skizzieren Sie sie.

Aufgabe T20: Gegeben seien die folgenden Teilmengen von \mathbb{C} :

$$M_1 := \left\{ \frac{t^2 + 3 + i2t}{t^2 + 1} : t \in \mathbb{R} \right\}, \quad M_2 := \{3 + is : s \in \mathbb{R}\}.$$

Zeigen Sie: (a) $|z - 2| = 1$ für alle $z \in M_1$, (b) $M_2 = \left\{ \frac{2z}{z-1} : z \in M_1 \right\}$.

Ohne Beweis: Welche geometrischen Objekte in der komplexen Zahlenebene stellen M_1 und M_2 dar?

Selbsttest: Weisen Sie den Folgen $(a_n)_n$ ihre Eigenschaften zu.

$a_n =$	1	n	$1/n$	$(-1)^n$	$(-1)^n n$	i^n/n	$(-1)^n n + n$	$a_{n-1}/2,$ $a_0 = 1$
konstant								
beschränkt								
unbeschränkt								
konvergent								
divergent								
uneigentlich konvergent								
monoton fallend								
streng monoton fallend								
monoton wachsend								
streng monoton wachsend								
alternierend								
Häufungspunkt(e)								
Grenzwert								