Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. T. Arens
Dipl.-Math. S. Heumann
Dipl.-Math.techn. A. Schkarbanenko

26	27	28	29	30	$\sum$

Gruppe

Karlsruhe, den 1.12.2009

Matrikel-Nr.: ....

Matrikel-Nr.: ....

6. Übungsblatt
zur Vorlesung Höhere Mathematik I für biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe 26: Berechnen Sie die Grenzwerte

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to x_0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}{x-1}, \quad \text{für} \quad x_0 \in \{0+, 1, 16, \infty\}, \qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to\infty} x^\alpha(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}), \quad \text{für} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 27: Untersuchen Sie, in welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ die folgenden Funktionen $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig sind:

$$\text{(a)} \quad f_1(x) := \begin{cases} \dfrac{x^3+4x^2+x-6}{x^3-3x+2}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\} \\ 0, & x = 1, \\ -\dfrac{1}{3}, & x = -2, \end{cases} \qquad \text{(b)} \quad f_2(x) := \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 28: Gegeben Sei die Menge $M = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}z| + |\mathrm{Im}z| \leq 4\}$ und die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ mit $f(z) = 2|z|$.

a) Warum muss f in M ein Maximum und ein Minimum besitzen?

b) Bestimmen Sie Maximum und Minimum von f auf M.

Aufgabe 29: Zeigen Sie: Für beliebige positive Zahlen a, b, c besitzt die Gleichung

$$\frac{(a+b)x+a-b}{x^2-1} + \frac{c}{x-2} = 1$$

je eine Lösung im Intervall $[-1, 1]$ und im Intervall $[1, 2]$.

Aufgabe 30: Zeigen Sie, dass es zu jeder Zeit zwei gegenüberliegende Punkte auf dem Erdäquator gibt, an denen die gleiche Temperatur herrscht.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass die Temperatur $t : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ auf dem Äquator eine stetige Funktion ist. Stellen sie eine Funktion für die Temperaturdifferenz gegenüberliegender Punkte auf und überlegen Sie, ob Sie darauf den Zwischenwertsatz anwenden können.

Abgabetermin: Donnerstag, den 10.12.2009, 12:00 Uhr, in den Abgabekästen bei Seminarraum 1C-03 im ersten Stock des Gebäudeteils C im Allianzgebäude (05.20).

6. Tutorium
zur Vorlesung Höhere Mathematik I für biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe T21: Berechnen Sie die Funktionenlimites, sofern Sie existieren:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5}{x^2-1}, \qquad \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x^2-1}, \qquad \lim_{x\to -1}\frac{(x-1)^2}{x^2-1}, \qquad \lim_{x\to 0+}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}.$$

Aufgabe T22: Können die folgenden beiden Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jeweils durch geeignete Werte y_1, y_2 stetig werden? Geben Sie geeignete Werte an, oder zeigen Sie das Gegenteil.

(a) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4-10x^2+9}{x^2-4x+3} & \text{für } x \in \mathbb{R}\backslash\{1,3\} \\ y_1 & \text{für } x = 1 \\ y_2 & \text{für } x = 3 \end{cases}$$

(b) $$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3+4x^2+x-6}{x^3-3x+2} & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{1,-2\} \\ y_1 & \text{für } x = 1 \\ y_2 & \text{für } x = -2 \end{cases}$$

Aufgabe T23: Gegeben sei die Menge $M = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le 2\}$ und die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(z) = \operatorname{Re}\big((3+4i)z\big).$$

(a) Untersuchen Sie die Menge M auf Offenheit, Abgeschlossenheit, Kompaktheit. Zeigen Sie, dass f auf M eine Minimal- und eine Maximalstelle besitzt.

(b) Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum von f auf M.

Aufgabe T24: Zeigen Sie, dass die Graphen der Funktionen

$$f_1(x) = \sqrt{x} \quad \text{und} \quad f_2(x) = (x^2-1)^2$$

auf ihrem gemeinsamen Definitionsbereich $\mathbb{R}_{\ge 0}$ mindestens zwei Schnittpunkte haben.

Tutorien: Freitag, den 4.12.2009, bis Dienstag, den 8.12.2009.