Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. T. Arens
Dipl.-Math. S. Heumann
Dipl.-Math.techn. A. Schkarbanenko

31	32	33	34	35	$\sum$

Gruppe

Karlsruhe, den 8.12.2009

Matrikel-Nr.: ....

Matrikel-Nr.: ....

7. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik I für biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe 31: Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

(a) $$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3+4i}{6}\right)^n\right),$$

(b) $$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2(n+1)^2}{n!}\right),$$

(c) $$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}\right),$$

(d) $$\left(\sum_{n=8}^{\infty}\frac{n+7\sqrt{n}}{n^3-n}\right).$$

Aufgabe 32: Berechnen Sie jeweils die ersten vier Partialsummen s_1, s_2, s_3 und s_4 und untersuchen Sie die Reihen auf Konvergenz.

(a) $$\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu(\nu+1)}-\frac{4}{\nu}\right)\right),$$

(b) $$\left(\sum_{\nu=2}^{\infty}(-1)^\nu\frac{\sqrt{\nu^2-4}}{\nu^2}\right),$$

(c) $$\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^\nu\frac{2\nu+1}{\nu(\nu+1)}\right).$$

Aufgabe 33: Zeigen Sie, dass die Reihe $\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{k+1}{2^k}\right)$ absolut konvergiert. Beweisen Sie anschließend für die Partialsummen s_n der Reihe durch vollständige Induktion die Darstellung

$$s_n=\frac{1}{9}\left(4+(-1)^n\frac{3n+5}{2^n}\right),\quad n=0,1,2,\dots,$$

und nutzen Sie dieses Resultat zur Gewinnung des Grenzwerts s der Reihe.

Aufgabe 34: Bestimmen Sie alle $\alpha\in\mathbb{R}$, für welche die folgende Reihe konvergiert.

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right)^k\right)$$

Hinweis: Untersuchen Sie zunächst die Reihe $\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}z^k\right)$ für $z\in\mathbb{R}$ auf Konvergenz.

Aufgabe 35: „Schon wieder Weihnacht...“, denkt sich Lucifer, dem die Freude und Liebe der Feiertage sehr auf den Pferdefuß gehen. Aus Rache will er aus allen unseren Reihen alle Summanden mit Zahlen mit Heiligenschein (das sind für ihn alle Zahlen mit Nullen) streichen und hofft damit die Welt unbemerkt in Inharmonie und Chaos stürzen zu können. Doch vielleicht können Sie seine Teufelei mit der nun in-harmonischen Reihe schnell enttarnen, wäre sie denn dann noch divergent?

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+\frac{1}{17}+\frac{1}{18}+\frac{1}{19}+\frac{1}{21}+\dots$$

Hinweis: Wie viele Kehrwerte j-stelliger Zahlen bleiben jeweils erhalten?

Abgabetermin: Donnerstag, den 17.12.2009, 12:00 Uhr, in den Abgabekästen bei Seminarraum 1C-03 im ersten Stock des Gebäudeteils C im Allianzgebäude (05.20).

7. Tutorium
zur Vorlesung Höhere Mathematik I für
biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe T25: Untersuchen Sie die Konvergenz der Reihen (a), (b) mit dem Quotientenkriterium und der Reihen (c), (d) mit dem Wurzelkriterium:

$$\text{(a)}\ \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k3^k}{k!(2k+1)}\right),\quad \text{(b)}\ \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^k}{k!3^k}\right),\quad \text{(c)}\ \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{9}{10}+\frac{1}{k}\right)^k\right),\quad \text{(d)}\ \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4^k(1+2k)^k(1-k)^k}{(3+k)^{2k}2^k}\right).$$

Aufgabe T26: Gegeben sei die Reihe $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)$ mit

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{-1}{2^n} & \text{für } n \text{ gerade} \\ \dfrac{1}{4^n} & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie mit dem Majorantenkriterium die absolute Konvergenz der Reihe.

(b) Zeigen Sie: Das Wurzelkriterium liefert auch die absolute Konvergenz der Reihe; mit dem Quotientenkriterium ist keine Aussage möglich.

(c) Schreiben Sie die Reihe als Summe von zwei geeigneten Reihen und berechnen Sie damit ihren Wert.

Aufgabe T27: Beweisen Sie die Konvergenz der Reihe $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-n)^n}{(n+1)^{n+1}}\right)$ mittels des Kriteriums von Leibniz.

Hinweis: Verwenden Sie die Monotonie der Folge $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Aufgabe T28: Der Turm von Babylon werde durch Aufeinanderstapeln von Würfeln W_n der Kantenlänge $\frac{1}{n}$ Meter nachgebaut, wobei $n = 1, 2, 3, \ldots$ ist. Die Bodenfläche des $(n+1)$-ten Würfels werde dabei auf die Mitte der Dachfläche des n-ten Würfels gesetzt.

(a) Wie hoch wird der Turm?

(b) Kann der Turm mit endlich viel Farbe angestrichen werden?

(c) Kommen die Baumeister mit endlich viel Beton aus, wenn jeder Würfel ganz aus Beton besteht?

Tutorien: Freitag, den 11.12.2009, bis Dienstag, den 15.12.2009.