Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. T. Arens
Dipl.-Math. S. Heumann
Dipl.-Math.techn. A. Schkarbanenko

36	37	38	39	40	$\sum$

Gruppe

Karlsruhe, den 15.12.2009

Matrikel-Nr.: ....

Matrikel-Nr.: ....

8. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik I für biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe 36: Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihen:

$$\text{(a)}\ \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+2}{2^k} x^k\right), \qquad \text{(b)}\ \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2+x)^{2k}}{(2+\frac{1}{k})^k}\right), \qquad \text{(c)}\ \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{k+2}}{2^k} x^k\right).$$

Aufgabe 37: Für die Funktionen cosh, sinh gilt

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \qquad \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}),\ x \in \mathbb{R}, \qquad \text{mit } e^x := \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

(a) Beweisen Sie die Identität $\cosh(2x) = [\cosh(x)]^2 + [\sinh(x)]^2$ mittels Cauchyprodukt.

(b) Läßt sich die Identität kürzer nachweisen?

(c) Bestimmen Sie die Potenzreihe für $f(x) = [\cosh(x)]^2 - [\sinh(x)]^2$.

Aufgabe 38: Gesucht ist die Potenzreihe $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-x_0)^n\right)$ zu der Funktion

$$f(x) = \frac{e^{(x-x_0)}}{1-(x-x_0)}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{1+x_0\}.$$

(a) Zeigen Sie $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Potenzreihe?

Aufgabe 39: Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{\exp(x^4) - 1}$$

durch Einsetzen der Potenzreihen von cos und exp.

Aufgabe 40: Der vom Rheuma geplagte Weihnachtsmann hat vom vielen Schnee die Nase voll. Da er nicht von einer baldigen Frühpensionierung ausgehen kann, verlegt er seinen Wohnsitz vom Nordpol auf die Malediven und beschließt, in Zukunft nur noch dort Geschenke auszutragen, wo die Gesamtmenge Schnee in den kommenden Jahren beschränkt ist. Die Meteorolügner des Weihnachtsmannes prognostizieren aufgrund des Klimawandels die Schneemenge im Jahr $2000+n$ proportional zu

$$a_n(x) := \frac{2^n x^{2n}}{(1+\frac{1}{n})^n},$$

wobei $x \in \mathbb{R}$ die Entfernung des Ortes vom Äquator in 10.000 km bezeichnet.

(a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)\right)$.

(b) Wird der Weihnachtsmann in Zukunft in Karlsruhe noch Geschenke verteilen?
Hinweis: Karlsruhe liegt auf dem 49. Breitengrad, der Erdumfang beträgt 40.000 km.

Abgabetermin: Donnerstag, den 7.1.2010, 12:00 Uhr, in den Abgabekästen bei Seminarraum 1C-03 im ersten Stock des Gebäudeteils C im Allianzgebäude (05.20).

8. Tutorium
zur Vorlesung Höhere Mathematik I für
biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe T29: Bestimmen Sie für $z \in \mathbb{C}$ den Konvergenzradius der Potenzreihen:

$$\text{(a)} \quad \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{3(k+2)!}\right), \qquad \text{(b)} \quad \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{2k} \cdot 2^k}{(1+\frac{1}{k})^k}\right), \qquad \text{(c)} \quad \left(\sum_{k=0}^{\infty} k^k z^k\right).$$

Aufgabe T30:

(a) Berechnen Sie die Potenzreihe der rationalen Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \frac{1+z^2}{1-z}$ im Entwicklungspunkt $z_0 = 0$.

(b) Berechnen Sie den Konvergenzradius der Reihe.

(c) Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Potenzreihe?

Aufgabe T31: Zeigen Sie mit den Potenzreihen

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{und} \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

und dem Cauchy-Produkt die Identität $2 \sin x \ \cos x = \sin(2x)$.

Hinweis:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left[\binom{2n}{2k} + \binom{2n}{2k+1}\right] + 1 = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (1)^k \cdot (1)^{2n-k} = (1+1)^{2n}$$

Aufgabe T32: Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{\sin x - x}$$

durch Einsetzen der Potenzreihe des Sinus.

Tutorien: Freitag, den 18.12.2009, bis Dienstag, den 22.12.2009.