

41	42	43	44	45	Σ

Gruppe

Karlsruhe, den 22.12.2009

Matrikel-Nr.:

Matrikel-Nr.:

9. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik I für biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe 41: Zur näherungsweisen Auswertung der ln-Funktion auf Computern kann man folgende Reihendarstellung des Logarithmus verwenden:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

- (a) Für welche Werte von $x \in \mathbb{R}$ ist diese Reihenentwicklung möglich (d.h. für welche x konvergiert die Reihe)?
- (b) Wieviele Glieder sind hinreichend, um $\ln(1.5)$ auf 2 Nachkommastellen genau auszuwerten? Berechnen Sie mit obiger Reihe $\ln(1.5)$ auf 2 Stellen genau!

Aufgabe 42:

- (a) Zeigen Sie für $\varphi \in \mathbb{R}$ und $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ die Gleichung

$$\cos((n+1)\varphi) + \cos((n-1)\varphi) = 2 \cos \varphi \cos(n\varphi).$$

- (b) Für $n = 0, 1, 2, \dots$ sei die Funktion $T_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$T_n(x) := \cos(n \arccos(x))$$

gegeben. Zeigen Sie

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x).$$

- (c) Folgern Sie: Die Funktion T_n ist ein Polynom vom Grad höchstens n .
- (d) Die Funktion T_5 lässt sich um den Punkt $x_0 = -1/2$ in eine Potenzreihe entwickeln. Welchen Konvergenzradius hat diese Potenzreihe?

Aufgabe 43: Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$\cosh z - \frac{1}{2}(1-8i)e^{-z} = 2+2i.$$

Verwenden Sie dazu quadratische Ergänzung.

Aufgabe 44: Bestimmen Sie jeweils alle $z \in \mathbb{C}$, die Lösungen der folgenden Gleichungen sind:

$$(a) \quad \cos \bar{z} = \overline{\cos z} \qquad (b) \quad e^{i\bar{z}} = \overline{e^{iz}}$$

Aufgabe 45: Lösen Sie die komplexen Gleichungen

$$(a) \quad (\sinh(iz) + \cosh(iz))^2 + 2 \sin(2z) = 0, \qquad (b) \quad (\sinh(iz) + \cosh(iz)) \sin(2z) = \sqrt{2}(i \sin(z) + \cos(z)).$$

Verwenden Sie dazu die quadratische Ergänzung.

Wir wünschen Ihnen ein frohes Weihnachtsfest und einen guten Rutsch ins neue Jahr.

Abgabetermin: Donnerstag, den 14.01.2010, 12:00 Uhr, in den Abgabekästen bei Seminarraum 1C-03 im ersten Stock des Gebäudeteils C im Allianzgebäude (05.20).

9. Tutorium
zur Vorlesung Höhere Mathematik I für
biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe T33:

- (a) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, die der Gleichung

$$\cos z = 4$$

genügen. Verwenden Sie die Darstellung der Kosinusfunktion durch die Exponentialfunktion.

- (b) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, die der Gleichung

$$\cosh(z) = -1$$

genügen. Verwenden Sie die Darstellung des Kosinus Hyperbolicus durch die Exponentialfunktion.

Aufgabe T34: Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, die die folgende Gleichung lösen,

$$-5 \cos z + 7i \sin z = 1.$$

Aufgabe T35: Beweisen Sie die folgenden Formeln für $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\sin z &= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y, \\ \cos z &= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y.\end{aligned}$$

Hinweis: Verwenden Sie Satz 4.21.

Aufgabe T36: Für $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$ wird die Potenz a^x definiert durch $a^x := e^{x \cdot \ln a}$. Zeigen Sie:

- (a) Für $a, b > 0$ gilt $(a^x)^y = a^{xy}$.
(b) Für $a > 1$ ist a^x streng monoton wachsend, für $0 < a < 1$ streng monoton fallend.

Für $a = 10$ nennt man die Umkehrfunktion von $f(x) = 10^x$ den *Zehner-Logarithmus* $\log_{10} x$.

- (c) Wie lässt sich unter Verwendung der Funktion $\ln x$ der Wert $\log_{10} x$ berechnen?

(d) Zeigen Sie:

$$\begin{aligned}\log_{10}(xy) &= \log_{10} x + \log_{10} y & , \quad x, y > 0 , \\ \log_{10}(x^y) &= y \log_{10} x & , \quad x > 0, y \in \mathbb{R} .\end{aligned}$$